Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985/1986
maart

Euclides 7

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^{c}, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Jaarrede 1985

De wiskundewereld is volop in beweging.
Naast het HEWET-experiment dat reeds enige jaren loopt is er nu ook het Havo-rapport, een rapport 'Longitudinale Leerstofplanning', zijn er diverse uitspraken van de Staatssecretaris en vele activiteiten op wiskundig terrein.
De rode draad door deze jaarrede is dan ook 'Vernieuwingen in het Wiskundeonderwijs'.

Beginnen we bij HEWET, dat de oudste rechten heeft en bijna experiment af is. Het afgelopen schooljaar was cruciaal voor het HEWETexperiment. Immers, het was de eerste maal dat de 12 scholen deelnamen aan de experimentele eindexamens wiskunde A en B.
Het resultaat bij wiskunde A kan uitermate bevredigend worden genoemd. Hoewel de opgaven door insiders zeker niet als gemakkelijk werden gekwalificeerd, was de gemiddelde score royaal boven de 6 en het percentage onvoldoendes voor een wiskundevak ongekend laag, namelijk 18 %. Bij het examen wiskunde B, dat zoals bekend slechts in één opgave afweek van het examen wiskunde I, waren de resultaten, evenals bij wiskunde I aanzienlijk minder. De opgave over ruimtemeetkunde heeft aan de docenten van de 12 deelnemende scholen niet al te positieve reacties ontlokt. Men was van mening dat de aansluiting op de tijdens het experiment behandelde stof zeer matig was.
In 1986 zullen er 49 dagscholen en 2 avondscholen deelnemen aan de dan nog experimentele eindexamens wiskunde A en B. Het bestuur vertrouwt er op dat de opstellers van de examenopgaven hebben geleerd van de ervaringen in 1985.
Inmiddels is op alle vwo-scholen in het land de wiskunde A en B op het lesrooster verschenen. De uitgevers van de grote methoden zijn er in geslaagd om hun lesmateriaal net op tijd op de markt te brengen. Net op tijd voor de leerling om er aan te beginnen; te laat voor de leraren om zich vóór de invoering een oordeel te kunnen vormen. Zoiets behoort bij de kinderziekten van een nieuw programma.
Het zal zeker nog enige jaren duren voor de situatie rond wiskunde A en B is uitgekristalliseerd en pas dan zal men een afgewogen oordeel over de HEWEToperatie kunnen geven.
Bij alle bemoedigende ervaringen heeft het bestuur een bittere pil moeten slikken. Het ministerie heeft, tegen de uitdrukkelijke adviezen van de HEWET-begeleidingscommissie in, besloten om in de zogenaamde kruisjeslijst bij Sociale Wetenschappen wiskunde A te vervangen door wiskunde A of B. Gecombineerd met het feit dat voor sommige studierichtingen wiskunde B, en niet wiskunde A, wordt gevraagd, wekt dit de schijn dat wiskunde B superieur is aan wiskunde A, terwijl dit op het punt van voorbereiding voor juist die sociale wetenschappen allerminst het geval is. Het effect van de nieuwe kruisjeslijst zou kunnen zijn dat leerlingen bij de keuze wiskunde A of B minder afgaan op hun aanleg of interesse dan op de paspoortfunctie van beide vakken.

Over een mogelijke ontwikkeling naar het zogenaamde 'nieuw lyceum' is onlangs de vho-nota verschenen. Ofschoon hierin wederom gesproken wordt over wiskunde als verplicht examenvak voor iedereen rekenen we op de toezegging van de staatssecretaris dat deze verplichting niet zal gelden zolang het programma voor de onderbouw niet is herzien.
Wel maken we ons zorgen over de voorgestelde lessentabellen voor de bovenbouw. Daaruit blijkt dat voor wiskunde in de vierde klas en voor wiskunde A en B in de klassen vijf en zes drie uren per week beschikbaar zijn. Wij zijn van mening dat voor een goed wiskundeprogramma, waar de leerling in zijn vervolgopleiding op kan bouwen in de vijfde en zesde klas vier uren per week beschikbaar moeten blijven.

Na de bovenbouw van het vwo komt nu de bovenbouw van de havo aan de beurt. Op 21 juni jongstleden heeft de Werkgroep ter voorbereiding van een wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo haar voorlopig rapport aan de Staatssecretaris, mevrouw Ginjaar-Maas, aangeboden.
In augustus jongstleden is dit rapport naar de meeste belanghebbende scholen verzonden. Inmiddels zijn door de vereniging in Eindhoven, Zwolle en Rotterdam druk bezochte hoorzittingen met een goede sfeer over dit rapport gehouden. Reacties van collega's en anderen die het bestuur via de forumbijeenkomsten of op andere manier bereikten zijn doorgezonden naar de Werkgroep. Deze zal op basis van reacties binnenkort haar eindrapport indienen.
Het opgestelde examenplan voorziet in twee vakken, wiskunde A en wiskunde B, bij het havo. Het plan is ingrijpend. Het bestuur juicht het toe dat wellicht mogelijkheden geschapen zullen worden om, net zoals op het vwo, meer leerlingen de gelegenheid te bieden wiskunde te doen op een manier die bij hun belangstelling en voorgenomen studie past. Het is evenwel dringend nodig dat er goede experimenten gehouden worden en adequate ondersteuning van leraren komt. Daarom heeft het bestuur, mede gelet op de adviezen van collega's tijdens de hoorzittingen, enige reserve tegen het voorgestelde tijdschema. Overigens ondersteunen we de adviezen van de Werkgroep.
Omdat blijkt dat zich binnen de afstemming van het totale programma – dus van 4 tot 18 jaar – nog een aantal knellende problemen manifesteert, heeft het bestuur samen met het bestuur van de NVORWO, de Nederlandse vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs, het initiatief genomen tot het inventariseren van deze knelpunten. Hiertoe is in de zomer van 1984 een werkgroep ingesteld welke als opdracht had een verkennende studie over dit probleem te verrichten. In het bijzonder de problemen binnen het reken/wiskundeprogramma voor leerlingen van 10-14 jaar. De werkgroep heeft in het voorjaar van 1985 een rapport, getiteld 'Rapport van de werkgroep reken/wiskundeprogramma 10-14 jaar' als advies aan de beide besturen uitgebracht. Uit dit rapport werd duidelijk dat er meer knelpunten in de longitudinale planning van het reken- en wiskundeonderwijs liggen dan alleen het aansluitingsprobleem. Zo werden problemen op het gebied van scholing, nascholing, examens en einddoelstellingen manifester dan reeds vermoed. Vooral het dreigende isolement van het huidige mavo/lbo werd duidelijker dan ooit. De beide besturen hebben deze knelpunten onderkend. Zij hebben ze door een gemengde afvaardiging van beide besturen in een samenhang laten plaatsen. Hieruit is een rapport ontstaan, getiteld: 'Longitudinale planning van het reken- en wiskundeonderwijs in Nederland' dat in augustus jongstleden aan de beide staatssecretarissen van onderwijs is aangeboden. In dit rapport wordt onder andere gepleit voor het instellen van een commissie ter begeleiding van een experiment 'voortgezet rekenen en wiskunde 12-15 jaar'. Dit experiment zal zijn vertrekpunt moeten hebben in het eindpunt van het nieuwe programma reken/-wiskunde voor de basisschool en aansluiting moeten vinden in de nieuwe programma's vwo en havo. Het zal op korte termijn effecten moeten hebben voor de noodzakelijke wijziging van de mavo/lbo-examens.

Het bestuur heeft ook de problemen in het wiskundeonderwijs voor volwassenen onderkend en daarom een werkgroep geformeerd die deze problemen moest onderzoeken en mogelijke oplossingen moest proberen te formuleren. Uit het onderzoek van deze werkgroep bleek dat aan het probleem tijdsdruk weinig te doen was. Wel zag de werkgroep mogelijkheden in het samenstellen van lesmateriaal dat beter gericht is op volwassenen. Uit deze werkgroep zijn twee nieuwe groepen ontstaan die zich gaan bezighouden, in samenwerking met enkele medewerkers aan de 'Wageningse methode', met het bewerken van bestaand materiaal zodat het beter geschikt is voor volwassenen. De ene groep richt zich op het mavo, de andere op het havo/vwo. Deze werkgroepen opereren vanaf juni zelfstandig; dat wil zeggen, ze worden niet meer door het bestuur begeleid.
Hoewel nascholing altijd wenselijk is voor docenten kan men zeker in een tijd van vernieuwingen niet zonder nascholing. Het enthousiaste waarmee door velen de HEWET-nascholingscursussen zijn gegeven of gevolgd mag hier zeker niet onvermeld blijven.

Ook andere vernieuwingen op het terrein van de nascholing mogen hier vermeld worden.
In september is na een intensieve periode van voorbereiding ook voor het vak wiskunde het 'Project Eerste Fase V.O.' van start gegaan voor mavo-docenten. De centrale doelstelling van dit plan is het inrichten van meer geïndividualiseerd onderwijs. Helaas is het aantal deelnemers veel lager dan verwacht mocht worden.
Ook het Landelijk Werkverband is dit jaar actief geweest. Er zijn twee didactiekconferenties geweest, een D-conferentie in januari 1985 over 'Zingeving van Wiskundeonderwijs' en een E-conferentie in maart 1985 over 'Voortgezet rekenen'. De geplande B-conferentie in februari 1985 en de geplande C-conferentie in oktober 1984 konden wegens gebrek aan belangstelling niet doorgaan. In april werd een kaderconferentie over 'Niet-wiskundige contexten in het wiskundeonderwijs' gehouden.
Het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde heeft inmiddels contact gezocht met het bestuur van onze vereniging inzake regionaliseringstendensen in de nascholing. Aan vele instituten zijn namelijk regionale onderwijscentra ontstaan, waarvan de vereniging gebruik kan maken. Er wordt in dit verband onder andere gedacht aan examenbesprekingen, korte nascholingsbijeenkomsten, lezingen en dergelijke. Een kleine commissie is de ideeën verder aan het uitwerken.
Juist bij de vele vernieuwingen die ons te wachten staan is het bestaan van een wiskundetijdschrift voor jongeren zeer wenselijk. Het is dan ook verheugend dat de Stichting IVIO zich inzet voor het voortbestaan van Pythagoras. De velen die zich de afgelopen 24 jaren hebben ingezet voor Pythagoras zijn wij grote dank verschuldigd en de redactie, die er nu aan werkt om de vijfentwintigste jaargang niet de laatste te laten zijn wensen wij veel succes. Wij hopen dat veel docenten hun leerlingen ertoe zullen aansporen een abonnement op Pythagoras te nemen.
Veel vernieuwingen zijn de revue gepasseerd waarbij al diverse groepen zijn genoemd, doch het blijft onmogelijk alle inzet voor vernieuwing en verbetering van het wiskundeonderwijs hier te noemen. Eigenlijk zou ook het werk van OW&OC, de SLO, de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde' en van vele anderen hier genoemd moeten worden.
Zeker mag onze 'Didactiekcommissie' niet vergeten worden. Zij heeft ook de studiedag van vandaag weer voorbereid.
Het thema van vandaag: 'Voorbeelden', kan weer een goede handreiking zijn wanneer wij in het onderwijs zoeken naar een manier van wiskunde doen die bij de belangstelling van de leerlingen past.
Met de wens dat u een dag tegemoet gaat waar u na afloop met plezier op terug kijkt open ik deze vergadering.

Notulen

van de algemene vergadering van de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 26 oktober 1985 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht

Om 10.10 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. dr. H. Freudenthal en dr. P. G. J. Vredenduin, de inspecteurs J. Boersma en drs. W. Kleijne, de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars de heer A. Schoeters en de heer T. Coppens en echtgenote, de vertegenwoordigers van Euclides de heren F. H. Dolmans, P. E. de Roest en A. B. Oosten en de vertegenwoordiger van Wolters-Noordhoff, de heer D. Soeteman. Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit.
Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 27 oktober 1984 en de jaarverslagen goedgekeurd. Het verslag van de kascommissie 1984/85 wordt voorgelezen en hierna wordt de penningmeester gedechargeerd.

Naar aanleiding van het financieel verslag vraagt vervolgens de penningmeester het woord. Hij merkt op dat al een aantal jaren de contributie niet is verhoogd. Dit was onder meer mogelijk doordat de abonnementsprijs van Euclides niet verhoogd werd. Inmiddels moet Wolters-Noordhoff per jaar ƒ 40.000,– op Euclides toeleggen. Daar Wolters-Noordhoff niet voornemens is dit te blijven doen, moet naar een oplossing gezocht worden. Als twee uiterste oplossingen ziet de penningmeester de volgende oplossingen: òf de contributie moet omhoog òf het aantal nummers van Euclides moet worden teruggebracht van tien tot acht per jaar. Als tussenoplossing kan men het aantal nummers tot negen terug brengen en de contributie minder verhogen. Bij een eventuele contributieverhoging moet men aan ƒ 5 à ƒ 10 per jaar denken. De redactie wil graag het aantal nummers per jaar op tien houden. De hoofdredacteur, F. Dolmans, deelt mede dat de redactie erg geschrokken is van het voorstel het aantal nummers terug te brengen van tien tot acht per jaar. Er zijn, volgens de redactie, twee redenen om het aantal nummers op tien te handhaven. Ten eerste is de hoeveelheid aangeboden kopij zo groot dat men reeds nu met de vraag worstelt of men snel genoeg kan plaatsen. Ten tweede wil de redactie actueel blijven en meent daarom dat Euclides frequent moet verschijnen. De penningmeester stelt voor dat iedereen over dit punt nadenkt en in het middaggedeelte van de themadag door handopsteking laat weten welk voorstel bij hem of haar de voorkeur geniet.
Vervolgens worden in de nieuwe kascommissie gekozen mevrouw G. Visser en de heer L. A. G. M. Muskens.

Het volgende agendapunt is de bestuursverkiezing wegens periodieke aftreding. Van de heer S. Kemme is de volgende brief ontvangen die door de voorzitter wordt voorgelezen:

Geacht Bestuur,

In de agendapunten e) en f) van de aanstaande jaarvergadering op 26 oktober worden drie aftredende bestuursleden herkiesbaar gesteld en wordt tevens voor gesteld het zittende bestuur uit te breiden met een tiende lid. Door deze voorstellen ontstaat de situatie dat het bestuur van de vereniging steeds 'ouder'en groter wordt. De bestuurstermijn van de huidige bestuursleden beloopt op dit ogenblik van 20 tot 7 jaar.
Het lijkt ons wenselijk dat het bestuur een beleid voert dat streeft naar een grotere kadervorming binnen de vereniging. Een dergelijke toename van kadervorming dient echter niet te worden nagestreefd door het steeds groter maken van het bestuur. Voor een goed en slagvaardig functioneren van het bestuur dient de omvang daarvan beperkt te blijven en is een 'snellere' doorstroming van bestuursleden noodzakelijk.
Ondergetekenden stellen u bij deze voor:

- de omvang van het bestuur beperkt te houden tot 9 personen,
- Mevr. J. van Vaalen en de heer L. Jacobs als tegenkandidaten voor de heren J. van Dormolen en M. Kindt (N.B.: De heer Jacobs is leraar aan het Augustinuscollege en vakdidaktikus aan de RUG.)
- Een statutenwijziging voor de jaarvergadering van 1986 voor te bereiden waarin de zittingsduur van bestuursleden wordt vastgesteld tot een maximum van 10 jaar. (Voor zittende bestuursleden kan een overgangsregeling worden opgesteld.)
- De bovenstaande drie voorstellen afzonderlijk in stemming te brengen in de vergadering van 26 oktober aanstaande.

Voor de noodzakelijke, dit voorstel ondersteunende handtekeningen, zie ommezijde. Met de beste bedoelingen voor het functioneren van de vereniging, namens de werkgroep didaktiek van de wiskunde RUG, hoogachtend, Sieb Kemme.

Als ondersteuners van dit voorstel tekenden: S. L. Kemme, M. Roorda, J. Adema, R. W. Jansen, L. Jacobs, J. J. Sloff en A. van Streun.
De voorzitter wijst er op dat dit voorstel geheel volgens statuten en huishoudelijk reglement is ingediend. Volgens art. 4 van het Huishoudelijk reglement moet het bestuur echter tenminste één week voor de algemene ledenvergadering tegenkandidaten aan alle leden bekend maken. Daar dit niet meer via Euclides kon gebeuren, zou dit een brief aan alle leden betekenen. Vanwege de financiële consequenties hiervan hebben de indieners van de tegenkandidaten hun voorstel ingetrokken, maar ze blijven wel achter hun voorstellen staan.

De voorzitter wijst nu naar artikel 2 van het Huishoudelijk reglement waarin staat dat het bestuur het aantal bestuursleden bepaalt. De reden voor het bestuur om het bestuur uit te breiden is de regelmatige toeneming van de werkzaamheden van het bestuur. Daar er nu geen tegenkandidaten zijn, worden de heren J. van Dormolen, F. F. J. Gaillard en M. Kindt als bestuurslid herkozen. De voorzitter zegt toe dat alles in het werk gesteld zal worden om de bestuursverkiezing volgend jaar naar ieders tevredenheid en correct te doen verlopen en dat er overleg met de indieners zal zijn. De heer S. Kemme vraagt of het juist is dat de heren Van Dormolen en Kindt het volgend jaar weer aftredend zullen zijn. De voorzitter antwoordt dat dit inderdaad de bedoeling is. De heer Kemme zegt dat hij dit liever dadelijk van de voorzitter gehoord had.
Wat betreft het voorstel de maximale zittingstijd van bestuursleden te beperken, hieraan wil het bestuur graag meewerken, maar het bestuur ziet toch wel graag mogelijkheden om uitzonderingen te mogen maken.
Mevrouw F. Meester is blij met het initiatief van de groep uit Groningen en vraagt het overleg van het bestuur niet slechts tot Groningen te beperken, maar in ruimere kring te overleggen. De heer J. J. Sloff vraagt het bestuur om bij een statuten wijziging ook de termijn voor tegenkandidaatstelling, die nu 14 dagen bedraagt, te herzien.
Vervolgens wordt ook mevr. J. van Vaalen tot bestuurslid gekozen.

De contributie voor het verenigingsjaar 1986/1987 wordt vastgesteld op *f* 50,–. Naar aanleiding hiervan komt de heer Sloff nog terug op de door de penningmeester voorgelegde balans. Hij leest hieruit af dat de vereniging een vermogen heeft van ruim *f* 127.000,– doch daarnaast ook een schuld aan Wolters-Noordhoff voor Euclides van ruim *f* 98.000,–. De penningmeester antwoordt dat vroegere algemene ledenvergaderingen een balans hebben gevraagd. De kascommissie wil dat het vermogen op de balans het vermogen is zonder dat daarvan een schuld wordt afgetrokken. Daarom is aan de balans de schuld aan W.N. toegevoegd.

De heer J. van Maanen vraagt vervolgens de aandacht voor het komende Mathematisch Congres. Op de docentendag hiervan is er een bijdrage 'Geschiedenis van de Wiskunde'. Hij vraagt om reacties van wiskundedocenten hiervoor. Wat doet men, wat kan en wat kan niet in de klas met de geschiedenis van de wiskunde? Hiermee is het eerste deel van de jaarvergadering geëindigd.

De heer van Dormolen zet vervolgens uiteen aan welke werkgroepen men kan deelnemen en waar deze werkgroepen zullen werken. De werkgroepen zijn: Aansluiten bij de ervaringswereld; Gebruik van wiskunde bij andere vakken; Rol van instapproblemen en contexten bij het begrijpen en leren van wiskundige vaardigheden; Voorbeelden; Wagenschein; Situatiebeschrijving in wiskundeteksten; Metaforen en andere beeldspraak; Proefwerken en schoolonderzoek bij HEWET.

Na deze werkgroepen en aansluitende lunchpauze houdt prof. dr. J. van de Craats een voordracht over 'Voorbeelden en tegenvoorbeelden'.
Vervolgens vraagt de penningmeester of men reeds heeft nagedacht over contributieverhoging of verlaging van de frequentie van Euclides. Van de aanwezigen is de meerderheid voor contributieverhoging, terwijl slechts een kleine minderheid het aantal nummers van Euclides tot 8 per jaar wil zien teruggebracht. De penningmeester deelt mede dat er ook nog schriftelijk andere suggesties zijn gedaan. Hierna gaat men weer uiteen in werkgroepen.

Om 16.40 heropent de voorzitter het jaarvergaderingsdeel van deze dag en gaat over tot de rondvraag.
De heer J. B. van de Groep vraagt het woord over Pythagoras. Hij vindt de abonnementsprijs van Pythagoras te hoog. Daardoor worden geen leerlingen gevonden die Pythagoras willen lezen. Hij vraagt het bestuur druk uit te oefenen om de abonnementsprijs te verlagen. De heer T. Vandeberg heeft bezwaar tegen een abonnement voor onbepaalde tijd voor Pythagoras. Hij had liever gezien dat een abonnement slechts voor één jaar gold.
De heer H. Pot heeft meegewerkt aan de voortzetting van Pythagoras. De huidige oplossing was de enige. Het enige alternatief was stoppen met Pythagoras. Hij is blij vanuit de zaal enige reacties te

hebben gehoord hoe men tegen de huidige oplossing aankijkt. Men heeft voor een doorlopend abonnement gekozen om goedkoop te kunnen werken. Door de terugloop van abonnementen werd Pythagoras erg duur. Ook een jaarlijkse werving voor alle abonnementen wordt zeer duur. Bij de huidige regeling is de leerling/abonnee zelf geheel verantwoordelijk, terwijl de school hier geheel buiten staat. De heer Van Dormolen vermeldt dat hij vroeger geabonneerd was op een jeugdtijdschrift dat jaarlijks een kaartje bijvoegde om het abonnement te verlengen. De heer Pot dankt nogmaals voor de suggesties.
Mevrouw F. Meester vraagt of er al iets naders bekend is over de werkgroep die wiskunde voor allen zal gaan bestuderen. De heer Maassen zegt dat er van alle kanten op het ministerie op de instelling van deze werkgroep wordt aangedrongen maar dat er nog niets bekend is.
De heer Van de Groep heeft de brief vanuit Groningen niet goed begrepen. Wat bedoelt men met kadervorming? Bovendien is het toch normaal dat bestuursleden voor drie jaar worden herbenoemd? De heer Van Dormolen zegt dat het bestuur het rooster van aftreden vaststelt en dat het accoord met Groningen onder voorwaarden is gesloten. De heer Maassen voegt hier nog aan toe dat bij de agenda voor de jaarvergadering 1986 een duidelijke uiteenzetting van de problematiek zal worden gegeven en de voorstellen voor de vergadering vergezeld zullen gaan van een bestuursadvies.
De heer A. Schoeters dankt namens de VVWL voor de uitnodiging en ziet terug op een geslaagde studiedag. Hij wenst het bestuur een succesvol werkjaar toe. Hij hoopt vele aanwezigen terug te zien op de gemeenschappelijke Vlaams Nederlandse dag. Hierna sluit de voorzitter om 16.52 uur de vergadering.

Mededeling

De XXVIe Internationale Wiskunde Olympiade 1985

Het jaarlijks terugkerende evenement van de Internationale Wiskunde Olympiade werd in 1985 van 29 juni t/m 10 juli in Finland gehouden. 38 landen hadden in totaal 209 deelnemers afgevaardigd. Voor het eerst waren IJsland, de Volksrepubliek China en Iran vertegenwoordigd. India had een waarnemer gestuurd. Het Nederlandse team bestond dit jaar uit:
Hans van Antwerpen, Nuenen, Ben Moonen, Hoensbroek, Machiel van Frankenhuijsen, Nijmegen, Jeroen Nijhof, Borne, Jeroen Hansen, Geldrop, Eric Tjong Tjin Tai, Hardenberg.
Ben Moonen behaalde een derde prijs. Officieel zijn er slechts individueel prijzen te winnen. Officieus wordt er altijd een landenklassement opgesteld waarin de landen geordend worden naar het totaal aantal punten dat elk land gescoord heeft. In dit klassement was dit jaar Roemenië eerste, gevolgd door de Verenigde Staten, Hongarije en Bulgarije. Nederland eindigde in dit klassement op de 19de plaats. De zes vraagstukken (geselecteerd uit een grote collectie vraagstukken die door de deelnemende landen waren ingezonden) die de leerlingen dit jaar moesten oplossen waren dit jaar afkomstig uit Groot-Brittannië, Australië, Nederland, Vietnam, de Sovjet-Unie en Zweden. In de internationale jury hadden dit jaar voor Nederland zitting prof. dr. J. van de Craats (KMA, Breda) en drs. J.M. Notenboom (SOL, Utrecht). De voorbereiding van de Nederlandse deelnemers, allen prijswinnaars bij de Nederlandse Wiskunde Olympiade, was ook dit jaar weer verzorgd door J. van de Craats door middel van lesbrieven.
De organisatie was bij de Finnen in zeer goede handen. Het grootste deel van de tijd waren teams en leiders gehuisvest in bungalows van een groot vakantiecentrum midden tussen de meren en de bossen bij het stadje Joutsa, op ongeveer 200 km ten noorden van Helsinki. Buiten de wiskundige bezigheden was daar gelegenheid tot zwemmen, roeien, surfen en natuurlijk ook de mogelijkheid om dagelijks de sauna te bezoeken. Daarnaast waren er excursies georganiseerd in de omgeving waarbij de deelnemers een goede indruk kregen van de wijdsheid van het Finse landschap en de leefwijze van de Finnen op het platteland en in de steden. De laatste dagen werden doorgebracht in Helsinki waar de officiële prijsuitreiking plaats vond in het auditorium van de Universiteit van Helsinki in aanwezigheid van de minister van onderwijs van Finland.
Voor de komende jaren zijn er gelukkig voldoende landen die zich bereid verklaard hebben om de Internationale Wiskunde Olympiade te organiseren. Omdat het organiserende land de verblijfkosten van alle deelnemers en begeleiders betaalt is het organiseren van de Internationale Wiskunde Olympiade een steeds kostbaarder en omvangrijker gebeuren gezien het groeiende aantal landen dat deelneemt. In 1986 organiseert Polen de Olympiade, in 1987 Cuba, in 1988 Australië en in 1989 West-Duitsland. De deelname van Nederland zal in '87 en '88 een kwestie zijn van het financieren van de reiskosten.
Officieus landenklassement van de 26e Internationale Wiskunde Olympiade, gehouden in Finland in 1985. Elk land kon een team afvaardigen van ten hoogste 6 leerlingen. Per leerling was een maximum score van 42 punten mogelijk (twee leerlingen, een Hongaar en een Roemeen behaalden die score). De lijst geeft ook een goed overzicht van de landen die vertegenwoordigd waren.

1.	Roemenië	201	6.	Sovjet-Unie	140
2.	Verenigde Staten	180	7.	West-Duitsland	139
3.	Hongarije	168	8.	Oost-Duitsland	136
4.	Bulgarije	165	9.	Frankrijk	125
5.	Vietnam	144	10.	Groot-Brittannië	121

Zie vervolg op blz. 240

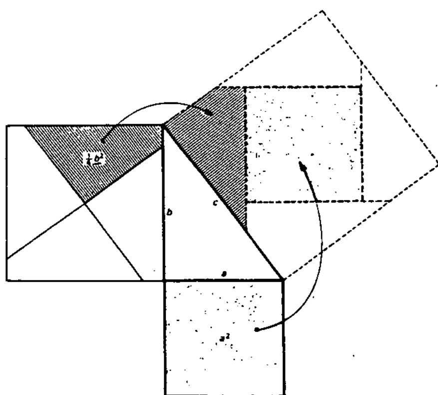
Voorbeelden*

Jan van de Craats

Het lijkt me passend om in dit verhaal eerst aansluiting te zoeken bij Euclides, ons grote voorbeeld, de man die zonder overdrijving de meest succesvolle wiskundeleraar genoemd mag worden, en naar wie de Vereniging van Wiskundeleraren haar blad genoemd heeft. De beroemdste stelling uit Euclides hoofdwerk *De Elementen* is zonder twijfel de stelling van Pythagoras (stelling 47 uit boek 1):

> Bij een rechthoekige driehoek is de oppervlakte van het vierkant op de hypotenusa gelijk aan de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden.

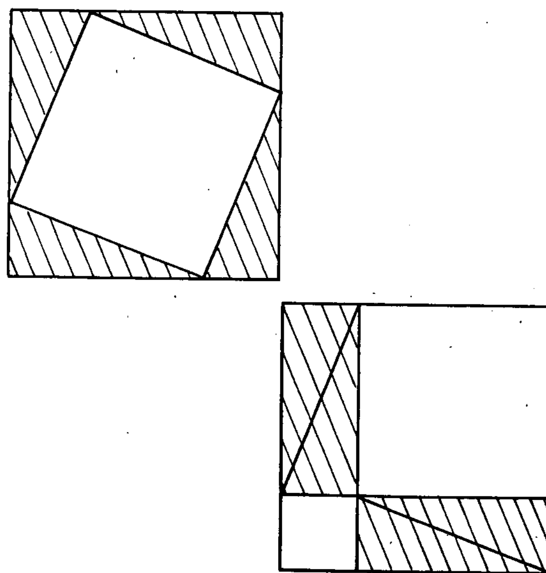
Het is zeker ook passend om de naam van Euclides te verbinden met die van Pythagoras, want die naam hoort eveneens bij een tijdschrift. En het eerste nummer van deze jaargang van Euclides was bijna geheel gevuld met stukjes uit oude jaargangen Pythagoras.



Figuur 1 Wat is er mis aan dit 'knipbewijs'?

* Voordracht gehouden op de jaarvergadering van de NVvW op 26 maart 1985 te Utrecht.

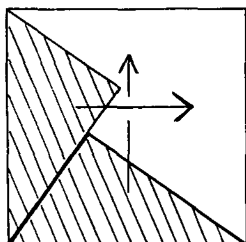
De stelling van Pythagoras. Kent u het bewijs dat Euclides ervan geeft? Het komt er op neer dat hij het vierkant op de hypotenusa in twee rechthoeken verdeelt, en die stukken via parallelogrammen transformeert in de vierkanten op de rechthoekszijden. Een fraai bewijs. Maar misschien toch een beetje lastig voor de beginner. U weet natuurlijk dat er nog honderden andere bewijzen zijn, waaronder een groot aantal 'knipbewijzen'. In het Pythagoras-Euclides nummer stond er ook een (blz. 16). Heeft u het bekeken? Goed bekeken? Ik denk het niet. Want dan had u gezien dat het niet deugt! Er klopt niets van! Als je volgens de aangegeven lijnen knipt, kun je de stukken van de kleine vierkanten niet samenvoegen tot het grote vierkant. Met de vraag wat er is misgegaan, hoe het komt dat haast niemand dit opmerkte, en hoe het dan wèl moet, kunnen denk ik weer vele bladzijden Euclides gevuld worden. Ik zal er maar over zwijgen, en snel overstappen naar een ècht knipbewijs. Het bewijs van figuur 2. Je hoeft er maar naar te kijken om te zien dat het klopt.

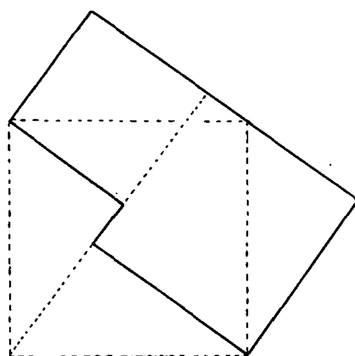


Figuur 2 Een schuifbewijs van de stelling van Pythagoras.

Misschien is het een psychologisch bezwaar dat het gaat over de 'lege ruimte' die overblijft als je binnen een groot vierkant raam op twee manieren vier congruente rechthoekige driehoeken legt. De vierkanten waar de stelling over gaat, zijn zelf niet 'tastbaar' aanwezig.

Dat bezwaar kleeft niet aan de variant hiervan die ik als mijn favoriet beschouw: het bewijs van figuur 3. Er behoeven uit een groot vierkant slechts twee exemplaren van de rechthoekige driehoek te worden geknipt. Na verschuiven vormen de drie stukken dan samen de twee kleinere vierkanten.



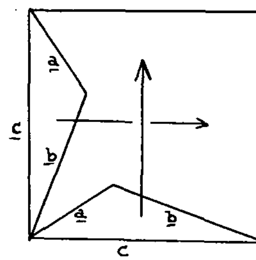


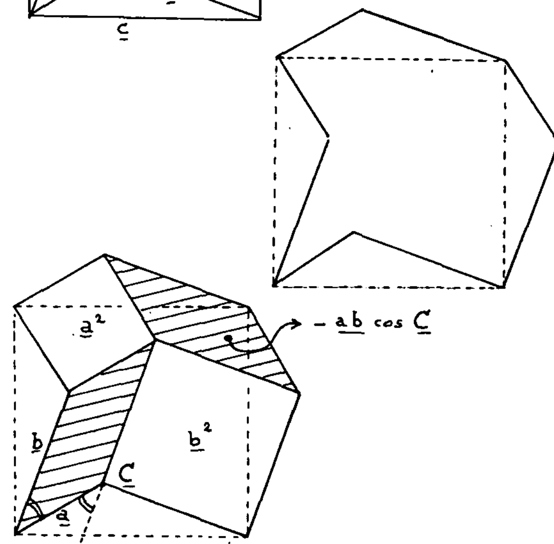
Figuur 3 Een knip- en schuifbewijs.

Waarom is dit eigenlijk een 'bewijs'? We hebben toch niets anders gedaan dan het tekenen (of knippen) van één concreet *voorbeeld*? Inderdaad. Maar ieder kind zal snappen dat het niet zozeer om dat ene voorbeeld gaat, maar om de *methode*. Het voorbeeld is representatief voor alle mogelijke situaties waarin sprake is van vierkanten op de zijden van een rechthoekige driehoek. De stap van concreet voorbeeld naar algemene geldigheid is een eenvoudige stap, en voor een wiskundige vanzelfsprekend. Maar de beginner is erbij gebaat als die stap expliciet en bewust gezet wordt!

Ik wil dit bewijs van de stelling van Pythagoras ook op een andere manier als voorbeeld gebruiken. Namelijk als voorbeeld van de manier waarop wiskundigen werken. Bij elk resultaat in de wiskunde moet je je een paar dingen afvragen. Zoals: Hoe kwam het tot stand? Wat zijn de wezenlijke stappen? Waar zijn welke gegevens gebruikt? Kun je met dezelfde middelen nog meer bereiken? Is het resultaat te generaliseren? Zijn er interessante speciale gevallen?

Laten we zo iets hier eens proberen toe te passen. De stelling gaat over een rechthoekige driehoek. Rechthoekig? Waarom eigenlijk? Wat gebeurt er als we in het knipbewijs een andere driehoek nemen, bijvoorbeeld een stomphoekige? We tekenen weer een vierkant op de langste zijde, en een tweede exemplaar van de driehoek langs een aangrenzende zijde van het vierkant (figuur 4). De knip-en-schuiftruc geeft nu een grillig gevormde achthoek. In die achthoek kunnen we weer de twee vierkanten op de 'kleine' zijden a en b tekenen. We houden dan nog wat over: twee congruente parallellogrammen met zijden a en b. Ja, en u raadt het natuurlijk al, elk parallellogram heeft oppervlakte $-ab\cos C$ ($\cos C$ is negatief!), en we hebben niets anders gevonden dan de *cosinusregel*:





$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Figuur 4 Hetzelfde recept bij een stomphoekige driehoek.

Overigens, bij dit voorbeeld is het niet zo vanzelfsprekend dat het representatief is voor *alle* driehoeken. Hoe zit het bijvoorbeeld bij scherphoekige driehoeken, of als het uitgangsvierkant niet op de langste zijde wordt genomen? Het is best leuk om dit uit te zoeken, ook al is de conclusie misschien dat het traditionele bewijs van de cosinusregel (natuurlijk m.b.v. Pythagoras) toch eenvoudiger is. Ik laat het aan u over.

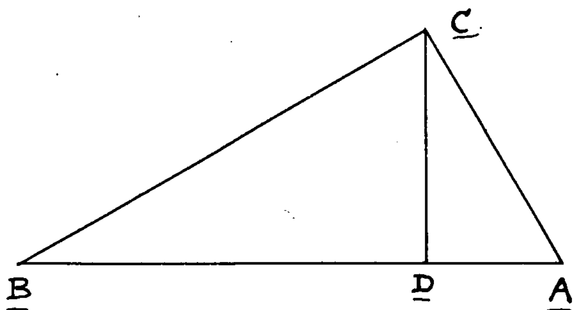
Nogmaals terug naar de stelling van Pythagoras. Mijn favoriete knipbewijs maakt gebruik van translaties (verschuivingen). Met gelijkvormigheidstransformaties, of, met een ander woord, *schaaltransformaties*, kan het ook. Schalen. Denk maar aan landkaarten, bijvoorbeeld kaarten van Nederland op verschillende schalen getekend. Als we op elke kaart een maatvierkantje van $10 \times 10\,\text{km}^2$ aangeven, zal de oppervlakte van de provincie Noord-Brabant telkens ruim 51 maal zo groot zijn als die van het bijbehorende maatvierkantje. Want tekenen we een kaart op een andere schaal, dan zullen de onderlinge *verhoudingen* van de oppervlakten niet veranderen.

Dit kunnen we toepassen bij de stelling van Pythagoras. Daarin komen drie vierkanten voor, oftewel drie maal dezelfde figuur ('vierkant'), telkens op een andere schaal getekend. Laten we nu in plaats van een vierkant een andere figuur F nemen, bijvoorbeeld een halve cirkel. Teken op elk van de zijden a, b en c zo'n figuur F_a, F_b, F_c. De oppervlakte van elke F is een vast veelvoud van de oppervlakte van het bijbehorende vierkant (bij de halve cirkel is die factor $\frac{1}{4}\pi$, maar de precieze waarde doet hier niet ter zake).

Volgens Pythagoras geldt

$$\square_a + \square_b = \square_c \qquad (1)$$

en bijgevolg geldt ook in het algemeen



Figuur 5 Een gelijkvormigheidsbewijs.

$$\text{opp}(F_a) + \text{opp}(F_b) = \text{opp}(F_c). \qquad (2)$$

We zien dus dat de volgende generalisatie van de stelling van Pythagoras geldt:

Worden op de zijden a, b en c van een rechthoekige driehoek (met hypotenusa c) gelijkvormige figuren F_a, F_b en F_c geconstrueerd, dan geldt (2).

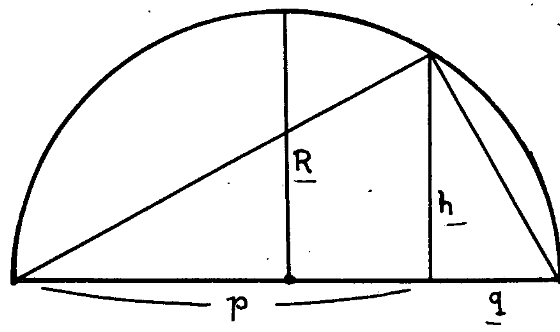
Op gevaar af u te gaan vervelen, wil ik één bijzonder geval apart bekijken. In figuur 5 is de hoogtelijn CD getekend, en u weet natuurlijk dat de driehoeken BDC, CDA en BCA onderling gelijkvormig zijn. We kunnen ze dus nemen als de figuren F_a, F_b en F_c van hierboven. Maar de gelijkheid

$$\text{opp}(BDC) + \text{opp}(CDA) = \text{opp}(BCA) \qquad (3)$$

is volslagen triviaal: de grote driehoek is opgebouwd uit de twee kleine driehoeken. Niets bijzonders. Maar we kunnen de hele redenering nu ook omkeren, en uitgaande van deze vanzelfsprekende gelijkheid de stelling van Pythagoras opnieuw bewijzen: de *vierkanten* op de zijden zijn elk een vast veelvoud van de *rechthoekige driehoeken* op de zijden, en uit (3) volgt dus (1) onmiddellijk.

Misschien vind ik dit bewijs nog wel aardiger dan het knip-en-schuifbewijs van hierboven! Of is het 'too sophisticated' voor de beginner?

Terug naar figuur 5, de rechthoekige driehoek met z'n hoogtelijn h uit de top. We completeren de figuur met een halve cirkel op de basis. Volgens de stelling van Thales ligt de top op die cirkel. We tekenen ook nog de verticale straal R (figuur 6).



Figuur 6 Het meetkundig en rekenkundig gemiddelde.

Het is duidelijk dat $h \leq R$, met gelijkheid d.e.s.d. als de driehoek gelijkbenig is. De stukken waarin het voetpunt van de hoogtelijn de basis verdeelt, noemen we p en q. Uit de gelijkvormigheid van de twee kleine driehoeken volgt $p : h = h : q$, d.w.z. $h = \sqrt{pq}$. Dit is het z.g. *meetkundige gemiddelde*

van p en q. Verder is $R = \frac{1}{2}(p + q)$ het *rekenkundig gemiddelde* van p en q, en figuur 6 laat ons het eenvoudigste geval zien van de beroemde *stelling van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde*:

$$\sqrt{pq} \leqq \frac{p+q}{2}.$$

Nemen we aan dat $p > q$, dan geldt dus

$$q < \sqrt{pq} < \frac{p+q}{2} < p.$$

De twee gemiddelden liggen dus dichter bij elkaar dan p en q. We kunnen dit procédé itereren, en rijen $\{p_n\}$ en $\{q_n\}$ definiëren door

$$p_0 = p, q_0 = q$$
$$p_{n+1} = \tfrac{1}{2}(p_n + q_n), q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

De rijen $\{p_n\}$ en $\{q_n\}$ convergeren dan monotoon dalend, resp. stijgend naar een gemeenschappelijke limiet die alleen maar van de startwaarden $p_0 = p$ en $q_0 = q$ afhangt. Gauss noemde deze limiet het *aritmetisch-geometrisch gemiddelde* van p en q. De notatie is $\mathrm{AG}(p, q)$.
Waarom was Gauss in dat gemiddelde geïnteresseerd? Samen met andere eminente wiskundigen uit die tijd hield hij zich bezig met *elliptische integralen*. Dat zijn integralen van een bepaalde vorm die niet in de bekende elementaire functies zijn uit te drukken. Ze treden o.a. op als je de lengte van een ellips wilt berekenen, vandaar hun naam. Laat bijvoorbeeld

$$x = q \cos \varphi, y = p \sin \varphi$$

een parametervoorstelling zijn van de ellips

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1.$$

Dan is $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}} =$ $(p^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}q$ de booglengte, en de lengte van de ellips is dus

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(p^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi)} \mathrm{d}q.$$

Dit is een z.g. elliptische integraal van de *tweede soort*. Als $p \neq q$ kunt u die integraal niet via eenvoudige primitieve functies berekenen. Maar er zijn wel methodes om zo'n integraal wat om te vormen, en hem bijvoorbeeld in verband te brengen met een z.g. elliptische integraal van de *eerste soort*:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(p^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Gauss bewees nu (en dat bewijs is niet eens zo moeilijk) dat

$$L = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AG}(p, q)},$$

en via het aritmetisch-geometrisch gemiddelde kon hij dus elliptische integralen berekenen. En wel met een buitengewoon efficiënt algoritme, want de rijen p_n en q_n blijken *kwadratisch* naar $\mathrm{AG}(p, q)$ te convergeren. Uit de definities volgt namelijk

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2} - \sqrt{p_n q_n} =$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{p_n} - \sqrt{q_n})^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{p_n} + \sqrt{q_n})^2} \cdot (p_n - q_n)^2$$
$$\approx \frac{1}{8\,\mathrm{AG}(p, q)} (p_n - q_n)^2.$$

Op den duur is dus het $(n + 1)$-e verschil een vrijwel constante factor maal het *kwadraat* van het n-de verschil. Wat betekent dat? Stel dat die factor niet al te ver van 1 vandaan ligt. (Dat is geen wezenlijke beperking: zonodig kunnen alle getallen door een geschikte schaalfactor gedeeld worden.) Als p_n en q_n dan op zeker moment nog ongeveer een duizendste van elkaar verschillen (dus in ongeveer drie decimalen met elkaar overeenstemmen), zullen ze bij de volgende stap nog maar ongeveer *een miljoenste* verschillen (zes decimalen correct); bij de daarop volgende stap zijn er al *twaalf* decimalen correct, enzovoorts.
Kwadratisch convergerende algoritmen behoren tot de meest spectaculaire verschijnselen in de numerieke wiskunde. Iedereen die wel eens met computers werkt zou minstens één maal zo'n *supersnel algoritme* in werking moeten zien. Je gelooft werkelijk je ogen niet als je bij elke stap het aantal correcte decimalen ziet verdubbelen. Binnen een

paar stappen zit je aan de precisiegrenzen van de computer, zelfs bij het werken met dubbele of viervoudige precisie.
Het bekendste voorbeeld van een kwadratisch convergerend algoritme is de *methode van Newton* die gebruikt wordt om nulpunten van een differentieerbare functie te bepalen. In het bijzondere geval van de functie $f(x) = x^2 - a$ $(a > 0)$ krijg je het bekende algoritme voor $\sqrt{a}$:

$$x_0 = 1, x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + (a/x_n)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dat algoritme schijnt al bij de Babyloniërs gebruikt te zijn. Op iedere school die een computer in huis heeft, zou het van tijd tot tijd gedemonstreerd moeten worden.
Ik wil u nòg een supersnel algoritme voorschotelen, maar daarvoor moet ik eerst een zijsprong maken. Al 'n paar keer in mijn verhaal is sprake geweest van het getal π. Misschien wel het beroemdste getal uit de wiskunde. Ook op de voorplaat van het Pythagoras-Euclides-nummer kwam het voor. Dat was een foto, gemaakt vlak nadat bekend was geworden dat Wolters-Noordhoff zou stoppen met de uitgave van het blad Pythagoras. Je ziet op de stoep van de WN-burelen een reusachtige sneeuwbal. De onbekende oprichter van dat vergankelijke monument had er een stuk hout in gestoken met daarop de volgende, metrisch gezien wellicht niet helemaal vlekkeloze, maar toch zeer treffende dichtregels:

'Hoewel Pythagoras vergaat
Brengen we zijn kennis hier te berde.
Zie, deze bol bestaat
Uit vier derde π r tot de derde.'

Gelukkig zijn die woorden over het tijdschrift Pythagoras te pessimistisch gebleken. Zoals u weet, is het blad in een andere vorm voortgezet, maar dit terzijde.
Het getal π kwam binnenin nòg een keer voor, nu in de vorm van een soort vlechtmatje, dat, als je het schuin bekeek, de volgende tekst onthulde:

'Wie U eens, π, heeft verzonnen
in aloude tijden, was nooit begonnen,
inderdaad spoedig geëindigd als hij had voorzien
welk gezeur de cijfers bien ...'.

Tel je de letters in de woorden van dit kreupelrijm, dan krijg je 3,14159265358979323846264... en dat is π in 23 decimalen! Drieëntwintig decimalen! Ruim voldoende voor elke denkbare praktische toepassing. Maar nog helemaal niets vergeleken bij de ruim honderdduizend decimalen van π die in 1962 in het tijdschrift Mathematics of Computation werden gepubliceerd, of bij de ruim 16 miljoen decimalen die in 1983 door de Japanners Kanada, Tamura, Yoshido en Ushiro met de computer werden berekend. Met welk doel? Wat is er zo interessant aan de cijfers van π? Waarom zijn er zo veel mensen door π gefascineerd? Ik krijg geregeld brieven van mensen die formules vragen waarmee ze de decimalen van π zelf met hun computer kunnen bepalen. Het tijdschrift *Kijk* publiceerde vorige maand een paar programma's, en één ervan had tot doel de decimalen van π op papier te krijgen.
Al in de verre oudheid probeerde men de verhouding tussen de diameter en de omtrek van een cirkel door een getal uit te drukken. Archimedes bewees dat de verhouding kleiner is dan 22/7 en groter is dan 223/71. Het grote belang van Archimedes' werk is niet zozeer deze benadering als wel de *methode* waarmee hij die vond, namelijk door in en om een cirkel regelmatige veelhoeken te beschrijven. Hij begon met zeshoeken, en verdubbelde telkens het aantal zijden. Hij vond een recurrente betrekking tussen de omtrekken van die veelhoeken, en daarmee kon hij in principe het getal π met een willekeurige grote precisie benaderen. Zijn formules komen neer op het volgende schema:

$$a_0 = 2\sqrt{3}, \quad b_0 = 3$$
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \; (n = 0, 1, \ldots).$$

Afschattingen van de getallen a_4 en b_4 (die behoren bij de om- en ingeschreven regelmatige 96-hoek) gaven hem de grenzen die we hierboven noemden. Met dezelfde methode berekende Ludolf van Ceulen (1539-1610) het getal π in 32 decimalen nauwkeurig. Christiaan Huygens (1629-1665) verfijnde Archimedes' methode aanzienlijk. Via een keten van meetkundige stellingen liet hij zien dat je met dezelfde middelen ruim drie maal zoveel decimalen kunt krijgen.

Latere benaderingsmethodes zijn bijna allemaal gebaseerd op de formule

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots (-1 < x \leqq 1).$$

De eenvoudigste reeks voor π is die van Gregory en Leibbniz, die je krijgt door $x = 1$ te nemen:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots .$$

Dat is ook de formule die gebruikt werd in het programma in *Kijk*. Zou de bedenker ervan het wel eens geprobeerd hebben? Ik vraag het me af. Want deze reeks is zo ongeveer de langzaamst convergerende reeks die je je kunt voorstellen. De fout is telkens ongeveer de helft van de laatste term. Dat betekent dat je voor een benadering van π in k decimalen ongeveer tot de 10^k term moet gaan! Elke nieuwe decimaal vraagt tien keer zo veel werk. Mede door het optreden van afrondingsfouten is deze methode volslagen onzinnig.
Sneller convergerende methodes zijn gebaseerd op formules als

$$\pi = 16 \arctan \tfrac{1}{5} - 4 \arctan \tfrac{1}{239}$$
(John Machin, 1680-1752)

of

$$\pi = 24 \arctan \tfrac{1}{8} + 8 \arctan \tfrac{1}{57} + 4 \arctan \tfrac{1}{239}.$$

Net als het algoritme van Archimedes convergeren deze methodes *lineair*, dat wil ruwweg zeggen dat je voor k decimalen ook iets in de orde van k stappen nodig hebt.
Waarom vertel ik u dat allemaal? Wel, zoals gezegd, het getal π is een fascinerend getal. Ook in de klas komt u het tegen. En het is toch leuk om met de computer π in een flink aantal decimalen op papier te krijgen. En passant kun je dan nog het een en ander kwijt over snel en langzaam convergerende algoritmes, afrondfouten, manipuleren van grote getallen, enzovoorts. Het algoritme van Archimedes is niet zo moeilijk uit te leggen. De arctangensreeks graaft wat dieper, maar misschien is hij toch ook wel in de hoogste klassen te slijten. Kortom, π bevat aanknopingspunten voor heel wat leerzame computeruren.

Maar de eigenlijke reden waarom ik er hier over praat, is dat ik u een *supersnel* π-algoritme wil laten zien. Tot voor kort waren die er niet. Er waren alleen lineair, of slechter convergerende algoritmen. Maar in 1976 ontdekten Brent en Salamin (onafhankelijk van elkaar) dat het aritmetisch-geometrisch gemiddelde gecombineerd kan worden met een aantal resultaten van Gauss en Legendre uit de theorie van de elliptische integralen, op zo'n manier dat een *kwadratisch* convergerend algoritme voor π ontstaat. Gauss beschikte eigenlijk al over alle bouwstenen. We hebben hierboven al gezien dat $AG(p, q)$ samenhangt met het getal π en een elliptische integraal. Nu zijn er tussen de verschillende soorten elliptische integralen bepaalde relaties die zó met een geschikte keuze van p en q gecombineerd kunnen worden dat de integralen er als het ware uitvallen. Dan wordt π zelf uitgedrukt in het aritmetisch-geometrisch gemiddelde. Hier is het resultaat:

$$\pi = \frac{4\left(AG\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}(p_j^2 - q_j^2)}.$$

Vraagt u me niet om dit hier in een paar regels af te leiden. Zo simpel is dat niet. Maar men kan bewijzen dat de uit die formule afgeleide benaderingen:

$$\pi_n = \frac{4 p_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1}(p_j^2 - q_j^2)}$$

met

$$p_0 = 1,\ q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2},\ q_{n+1} = \sqrt{p_n q_n}$$

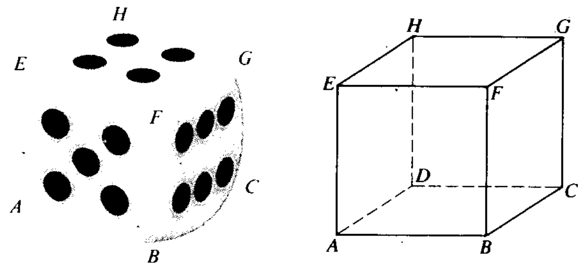
inderdaad *kwadratisch* naar π convergeren.
En hoewel de theorie hierachter dus vrij lastig is, is het algoritme heel eenvoudig. Hier is het resultaat van de eerste vier iteraties:

3,14057925...
3,14159264621...
3,14159265358979323827951...
3,14159265358979323846264338327 95...

en met die laatste waarde was de nauwkeurigheidsgrens van onze computer bereikt. Alle opgegeven decimalen in het laatste getal zijn correct. Eigenlijk is het natuurlijk pas leuk als je π in minstens een paar honderd decimalen op papier kunt krijgen. Is het geen mooie uitdaging om zelf rekenoperaties op willekeurig grote getallen te ontwerpen? U kunt in principe op papier toch ook willekeurig grote getallen met elkaar vermenigvuldigen en op elkaar delen? Dan moet u het de computer ook kunnen leren. Een aardig onderwerp voor een computerproject op school, en heel wat leuker en leerzamer dan de zoveelste variant op Star Wars of Pacman. Voor het professionele werk – maar dat valt ver buiten de schoolmogelijkheden – kunnen die rekenoperaties op grote getallen nog aanzienlijk versneld worden. Optellen en aftrekken van grote getallen is vrij eenvoudig. Maar vermenigvuldigen en delen lijkt veel gecompliceerder. Dat is het natuurlijk ook, maar met z.g. Fast Fourier Transform technieken is het tegenwoordig mogelijk om die bewerkingen zó zeer te versnellen, dat ze ongeveer net zo veel tijd kosten als optellen en aftrekken. Met het suppersnelle π-algoritme van hierboven, en met dit soort supersnelle rekenoperaties is π in 16 miljoen decimalen bepaald.

Twee jaar geleden drukte het Haarlems Dagblad een getal van bijna 40000 cijfers af: het toen grootste bekende priemgetal. Dat getal nam een volle pagina in beslag. Om de 16 miljoen decimalen van π af te drukken, zouden dus 400 pagina's nodig zijn!

Waar zijn al die decimalen goed voor? Is het alleen maar een curiositeit? Niet helemaal. Want het π-algoritme is een *voorbeeld* van een hele klasse van supersnelle algoritmes voor de berekening van transcendente functies zoals e-machten, logaritmen, sinussen en cosinussen. En daarnaast vormt de rij van decimalen zèlf ook weer een bron van onderzoek. Komen alle cijfers ongeveer even vaak voor? En alle combinaties van 2, 3, 4, ... cijfers? We kunnen het natellen, maar theoretisch is er niets over bekend. Het enige dat we weten is dat de decimale ontwikkeling van π niet *periodiek* kan zijn, want π is irrationaal. Maar het is best denkbaar dat er vanaf zeker moment helemaal geen negens meer voor zullen komen, of zelfs dat er alleen nog maar nullen en enen verschijnen. Zou ergens de combinatie 0123456789 voorkomen? Of duizend nullen achter elkaar? We weten het niet. Brouwer heeft dit soort vragen gebruikt om de onzinnigheid aan te tonen van het klakkeloos gebruiken van het 'principe van de uitgesloten derde mogelijkheid' in de wiskunde. Nog een intrigerende vraag: zouden de decimalen van π een z.g. pseudo-random reeks vormen? Met andere woorden, zijn er kriteria waarmee je kunt uitmaken of de rij van de decimalen van π er net zo uitziet als de rij van uitkomsten van een serie worpen met een tienzijdige dobbelsteen? Eigenlijk is die vraag nog veel te vaag gesteld. Het zoeken naar een precieze definitie van het begrip 'random-reeks' die in alle opzichten bevredigend is, stelt wiskundigen nog steeds voor onopgeloste problemen. We moeten die kwesties hier laten rusten.

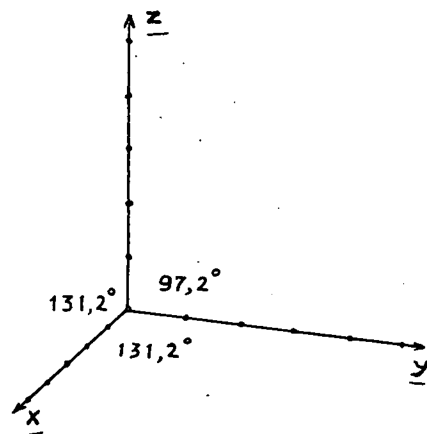


Figuur 7 Twee maal een 'kubus'.

Zojuist is een dobbelsteen ter sprake gekomen, en dat brengt me op de volgende 'voorbeeld'-kwestie: als je voor het eerst op school over kubussen spreekt, wat voor een voorbeeld van een kubus kies je dan? De auteurs van *Sigma* deel 2 dachten blijkbaar aan een dobbelsteen. Een gewone, wel te verstaan. Op blz. 177 zetten ze een foto van een dobbelsteen als voorbeeld van een kubus. Of dat echt zo'n gelukkig voorbeeld is, betwijfel ik, want met z'n afgeronde hoeken lijkt hij meer een tussenvorm tussen een kubus en een bol, maar daar wil ik niet zo zwaar aan tillen. Waar ik me wel over verbaasd heb, is de tekening ernaast. In de begeleidende tekst staat: 'In de rechterfiguur is de kubus nog eens getekend'. En dan volgt iets over het 'verborgen' hoekpunt en de 'verborgen' ribben, die in de tekening gestippeld zijn getekend. Maar ik blijf de hele tijd naar die tekening kijken, en ik vergelijk hem met de foto. Goed, door de afgeronde hoeken van de dobbelsteen is de 'echte' kubus op de foto niet zo duidelijk te zien, maar ik zie toch wel

dat die er heel anders uit moet zien als de tekening ernaast. Zie u het ook? Bij de foto zijn de drie zichtbare zijvlakken scheve parallellogrammen. Waarom wordt in de rechterfiguur het voorvlak dan als een vierkant getekend?
Ik denk dat het een beroepsdeformatie van wiskundigen is. Kubussen teken je nu eenmaal zo. Ook al staat er een foto naast die duidelijk anders is. Ach, misschien hadden ze de foto gewoon een beetje anders moeten nemen. De dobbelsteen een beetje draaien, zodat het wel klopt. Kan dat eigenlijk? Kun je een kubus zo fotograferen dat het resultaat er net zo uitziet als de rechtertekening? Heeft u zich dat wel eens afgevraagd?
Een foto met een gewone camera geeft een centrale projectie, dus een perspectivisch beeld. Bij voorwerpen die ver weg staan, lopen de projecterende stralen onderling vrijwel evenwijdig, en het perspectivische beeld gaat dan lijken op het beeld bij parallelprojectie. Onze ogen werken ook zo ongeveer als camera's, en als we kijken, zien we perspectivische beelden. Een natuurgetrouwe afbeelding krijg je daarom door òf een perspectiefbeeld, òf een parallelprojectie te maken. Dat laatste is meestal wel een goede benadering, want iedereen die fotografeert, weet dat het verschil tussen een paar meter en oneindig ver niet zo groot is. De Duitsers noemen een parallelprojectie ook wel een *Fernbild*, een afbeelding van iets dat ver weg is.
Als je in het onderwijs begint met ruimtemeetkunde, zou je er ook voor moeten zorgen dat je met *natuurgetrouwe* illustraties werkt. Foto's of goede tekeningen. Alleen zo kun je verwachten dat je het 'ruimtelijk inzicht' van de leerlingen ontwikkelt. Het maken van goede perspectieftekeningen is vrij lastig, dus het ligt voor de hand met parallelprojecties, Fernbilder, te werken. Die hebben o.a. het voordeel dat evenwijdigheid behoudend blijft, en ook dat lengteverhoudingen op parallelle lijnen ongewijzigd blijven. Veel eigenschappen van de 'echte' figuur blijven dan in de tekening behouden, of komen op eenvoudige wijze getransformeerd te voorschijn.
Maar er zijn allerlei soorten parallelprojecties. Orthogonale en scheve parallelprojecties. Welke corresponderen met 'fotograferen op oneindig'? We richten altijd onze camera, en ook ons oog *recht* op het verre voorwerp dat we willen zien of fotograferen. De (bijna) parallelle lichtstralen vallen dan *loodrecht* op de gevoelige plaat, resp. ons netvlies. We zien altijd een *loodrechte* (orthogonale) parallelprojectie. Kijkt u zelf maar eens naar een ver draadmodel van een kubus. Als u het tekent zoals u het ziet, zet u in gedachten een doorzichtig scherm *loodrecht* op de blikrichting, en u neemt dat scherm als tafereel. De meest natuurgetrouwe parallelprojectie is dus de *orthogonale* parallelprojectie.
En nu komt het. De manier waarop wiskundigen bijna altijd een kubus tekenen, is wèl een parallelprojectie, maar geen *orthogonale* parallelprojectie. Het is de z.g. *Cavalierprojectie*, waarbij de projecterende stralen *scheef* op het tafereel vallen. Twee van de drie asrichtingen, de y-as en de z-as, kiest men evenwijdig aan het tafereel, en de x-as wordt daar schuin op geprojecteerd. Een kubus met ribben evenwijdig aan de assen geeft dan een beeld waarin voor- en achtervlak op ware grootte worden weergegeven. Dat is ook de belangrijkste reden om die projectie te gebruiken: hij is gemakkelijk te tekenen. Maar zo'n tekening heeft iets *onnatuurlijks*. In werkelijkheid 'zie' je nooit een kubus op die manier. Je krijgt pas een 'natuurgetrouw' beeld als je de tekening op zo'n manier schuin houdt, dat het scheef zijn van de projectie weer gecompenseerd wordt. Probeer het maar eens!
We moeten de *psychologische barrière* die we als wiskundeleraren opwerpen door het tekenen van onnatuurlijke figuren, niet onderschatten. Volgens mij was een belangrijke reden van het mislukken van het oude stereometrieonderwijs het feit dat zo veel leerlingen moeite hadden om platte plaatjes ruimtelijk te interpreteren. Met de nieuwe ruimtemeetkunde in wiskunde B dreigen we weer in precies dezelfde fouten te vervallen. Overal zie ik weer Cavalierprojecties opduiken, bijvoorbeeld in de eindexamenopgaven. Hoopgevend is dat bij het examen voor wiskunde A wèl een fatsoenlijk ruimtelijk plaatje stond!
Hoe moet het dan wèl? Laten we gewoon eens in de praktijk gaan kijken. Hoe zijn bijvoorbeeld de werktekeningen getekend die ieder kind gebruikt bij het maken van z'n Lego-modellen? Niet in Cavalierprojectie. Bijna geen kind zou het dan na kunnen bouwen, dat verzeker ik u! Het zijn ook geen foto's of perspectivische tekeningen. Het zijn ten duidelijkste parallelprojecties. *Orthogonale* parallelprojecties. De drie asrichtingen van de blokjes, zeg maar de x-as, de y-as en de z-as, lopen

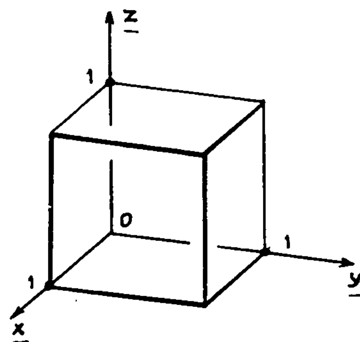
alledrie schuin t.o.v. het tekenvlak. In de projectie is de verticale z-as ook verticaal getekend, en de getekende x-as en y-as maken *beide* een stompe hoek met de getekende z-as. Bij alledrie de assen treden *verkortingsverhoudingen* op, die afhangen van de stompe hoeken tussen de getekende assen. Kiest men die hoeken alle drie gelijk (120°), dan zijn ook die verkortingsverhoudingen gelijk (nl. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$). De eenheidskubus wordt dan afgebeeld als een regelmatige zeshoek. Een nadeel is dat er dan twee hoekpunten in de tekening samenvallen. Kiest men *twee* hoeken gelijk, en de derde daarvan verschillend, dan ontstaat een figuur waar meer in te zien is. Bij de Lego-tekeningen, waar het van het grootste belang is dat er geen hoekpunten of ribben over elkaar heen vallen, zijn de drie hoeken alle verschillend genomen. In de praktijk geven echter tekeningen met twee gelijke hoeken (zg. *dimetrische projectie*) weinig problemen. Bij een veel gebruikte methode, de zg. *'ingenieursprojectie'*, zorgt men ervoor dat de drie verkortingsverhoudingen zich verhouden als 1 : 2 : 2. De hoeken zijn dan 97,2°, 131,4° en 131,4°, en de verkortingsverhoudingen zelf zijn $\frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}471$ en $\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}943$.



Figuur 8 De ingenieursprojectie.

In figuur 9 is de eenheidskubus in deze projectie getekend. Bij een Lego-tekening (figuur 10) mat ik hoeken van 106°, 142°, 112° en verkortingsverhoudingen $v_x = 0{,}95$, $v_y = 0{,}69$ en $v_z = 0{,}79$. Deze figuur maakt een veel natuurlijker indruk dan de Cavalierprojecties.

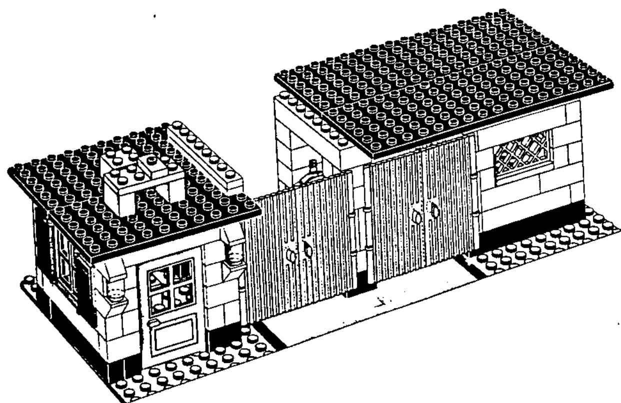
Ontegenzeggelijk is de theoretische achtergrond van orthogonale projectiemethoden (de zg. orthogonale axonometrie) ingewikkelder dan die van de Cavalierprojectie. Maar je hoeft er ook niet alles van te behandelen om het te kunnen toepassen. Ruwe schetsen maken is geen enkel probleem, en wil je wat preciezer werken, dan kun je net als ingenieurs één of meer standaardprojecties uitkiezen, en daarin alles tekenen. Echter, aangezien de inhoud van ruimtemeetkunde in wiskunde B nog lang niet uitgekristalliseerd is, lijkt het me lang geen



Figuur 9 De eenheidskubus in ingenieursprojectie.

gek idee om daarin ook wat diepgaander op de orthogonale axonometrie in te gaan. Allerlei al eerder op school ontwikkelde technieken komen dan weer naar voren (vlakke meetkunde, goniometrie), de leerlingen worden voorbereid op technisch tekenen, het komt ook van pas bij Computer Graphics, één van de vakken van de toekomst. En, last but not least, onderschat u niet het belang van *goede* tekeningen in het meetkundeonderwijs. De Cavalierprojectie is onnatuurlijk, en daarom vooral ook *lelijk*. De tekeningen 'leven' niet. Een bol zou als ellips getekend moeten worden, om maar eens een voorbeeld te noemen. U zult merken hoeveel plezier leerlingen beleven aan het maken van natuurgetrouwe, mooie tekeningen, figuren die door hun manier van tekenen direct al de suggestie van ruimte en diepte oproepen.

Voorbeelden – we hebben er een bonte verzameling van ten tonele gevoerd. Allemaal hadden ze te maken met wiskunde op school. Ze gaven u hopelijk plezier, en stof tot nadenken. Misschien duiken ze vroeg of laat in de een of andere vorm in de les op. Want wiskunde-onderwijs is nooit statisch. Altijd zullen nieuwe ideeën, nieuw ontdekte samenhangen, nieuwe toepassingen leiden tot veranderingen



en aanpassingen. De afgelopen jaren hebben een explosie van creativiteit te zien gegeven, met name op het gebied van de ontwikkeling van wiskunde A. De inzet van de leraren hiervoor is indrukwekkend, en slechts verklaarbaar uit de voldoening die verkregen wordt bij het bestuderen van en onderwijs geven in een duizenden jaren oude, maar nog steeds springlevende en vitale wetenschap.

Literatuur

Over het π-algoritme: Stan Wagon, *Is π normal?*, The Math. Intelligencer, vol. 7, 1985, 65-67.
Over algoritmen in het algemeen: Arthur Engel, *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*, Klett, Stuttgart, 1977.
Over orthogonale axonometrie: oude boeken over Beschrijvende meetkunde; een uitstekend modern boekje is: Wolfgang Haack, *Darstellende Geometrie III*, Sammlung Göschen, 1980.

Vervolg van blz. 230

11. Australië	117	25. Marocco	60
12/13 Canada	105	26. Colombia	54
Tsjecho-Slowakije	105	27. Tunesië	46 (4 deeln.)
14. Polen	101	28. Turkije	40
15. Brazilië	83	29. Algerije	36
16. Israël	81	30. Noorwegen	34
17. Oostenrijk	77	31. Iran	28 (1 deeln.)
18. Cuba	74	32. China	27 (2 deeln.)
19. Nederland	72	33. Cyprus	27
20. Griekenland	69	34. Finland	25
21. Joegoslavië	68	35. Italië	20 (5 deeln.)
22. België	67	36. Spanje	18 (4 deeln.)
23. Zweden	65	37. IJsland	13 (2 deeln.)
24. Mongolië	62	38. Koeweit	7 (5 deeln.)

De vraagstukken waren dit jaar moeilijker, over het geheel genomen, dan in de voorafgaande jaren. Vooral vraagstuk 3 (voorgesteld door Nederland!) bleek erg lastig. Er waren maar weinig leerlingen die deze vraag tot een goed einde gebracht hebben. Verder bleek bij vraag 5, die een nogal onoverzichtelijke figuur op kan leveren dat er een generalisatie mogelijk is die veel gemakkelijker op te lossen is dan de originele opgave!

1 Een cirkel waarvan het middelpunt ligt op zijde AB van een convexe vierhoek $ABCD$ raakt de drie andere zijden. Bewijs: als $ABCD$ een koordenvierhoek is dan geldt: $AD + BC = AB$.

2 Gegeven zijn de natuurlijke getallen n en k met een grootste gemene deler gelijk aan 1, en $0 < k < n$. Elk getal uit de verzameling $M = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ is blauw of wit gekleurd op zo'n manier dat aan de volgende voorwaarden is voldaan:
(a) voor elke $i \in M$ hebben i en $n - i$ dezelfde kleur,
(b) voor elke $i \in M$, $i \neq k$, hebben i en $|k - i|$ dezelfde kleur.
Bewijs dat alle getallen uit M dezelfde kleur hebben.

3 Bij elk polynoom $P(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ met gehele coëfficiënten beschouwt men de coëfficiënten die oneven getallen zijn. Hun aantal noemt men $w(P)$.
Zij $Q_i(x) = (1 + x)^i$ voor $i = 0, 1, 2, \ldots$
Bewijs: als $i_1, i_2, \ldots, i_n$ gehele getallen zijn zo, dat $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ dan geldt
$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$.

4 Gegeven is een verzameling van 1985 verschillende gehele getallen groter dan nul. Geen van die getallen heeft een priemdeler groter dan 26.
Bewijs dat M vier getallen bevat waarvan het produkt de vierde macht is van een geheel getal.

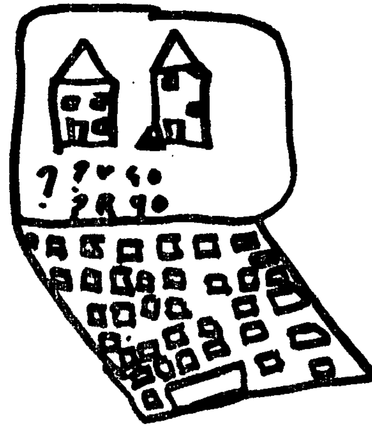
5 Een cirkel met middelpunt O gaat door de hoekpunten A en C van driehoek ABC en snijdt de lijnstukken (segmenten) AB en BC opnieuw in twee verschillende punten K en N. De omgeschreven cirkels van de driehoeken ABC en KBN snijden elkaar in precies twee verschillende punten B en M.
Bewijs dat hoek OMB een rechte hoek is.

6 Bij elk reëel getal x_1 wordt als volgt een rij $x_1, x_2, x_3, \ldots$ geconstrueerd:
$x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$ voor elke $n \geq 1$.
Bewijs dat er precies één waarde x_1 is waarvoor geldt dat
$0 < x_n < x_{n+1} < 1$ voor elke n

Informatie over de oplossingen is te krijgen bij J. van de Craats, M. de Jongstraat 12, Oosterhout (NB) of bij de schrijver van dit verslag.

Ervaringen met LOGO

Fred Korthagen



Inleiding

Op conferenties en in onderwijskundige publikaties duiken steeds meer enthousiaste verhalen op over LOGO. De eerste indruk is dat het gaat om een computertaal, maar de grote mensen achter LOGO, m.n. Seymour Papert, roepen om het hardst dat LOGO méér is dan zo maar een computertaal. LOGO is een *leeromgeving* zeggen zij, en brengt leerprocessen op gang die qua effekt veel verder reiken dan alleen het met de computer kunnen werken.
Geprikkeld door dergelijke kreten en door uitspraken dat kinderen die nog nauwelijks kunnen lezen of schrijven, met LOGO kunnen werken, vatte ik het plan op om een LOGO-experiment te starten. Het lukte me om twee van onze studenten (Cor Kraaikamp en Ton Voogt) die bezig waren met het behalen van een eerstegraads wiskunde-bevoegdheid, enthousiast te maken voor dit experiment. Eerlijkheidshalve moet ik hierbij vertellen, dat ik op dat moment nog betrekkelijk sceptisch was en eigenlijk nog niet veel over LOGO wist. Maar het principe 'al doende leert men' ging ook hier op: we maakten met z'n drieën plannen en toen het allemaal ging lopen werden we niet alleen vanzelf deskundiger, maar ook behoorden we al snel tot de groeiende groep LOGO-aanhangers.

De uitgangspunten van LOGO

Aan LOGO liggen twee fundamentele ideeën ten grondslag:

1 *De computer wordt zó gebruikt, dat het communiceren ermee een natuurlijk proces wordt.*

Men vergelijke het leren van Frans door het in het hoofd stampen van woordjes en het leren van Frans door een paar maanden naar Frankrijk te gaan en deze ter plekke te leren. Veel onderwijs lijkt op de eerste vorm van leren te mikken: het voorbereiden van leerlingen op een werkelijkheid die er op dit moment nog niet voor ze is. Bij de tweede vorm van leren is sprake van een natuurlijke leeromgeving.
Een ander voorbeeld dat vaak genoemd wordt om de ideeën achter LOGO te illustreren, is dat van de sambascholen in Rio de Janeiro. Daar gaan de mensen heen om plezier te maken, hun vrienden te ontmoeten en met en van elkaar de samba te leren. Als men de vergelijking met het traditionele onderwijs doortrekt, zou je kunnen zeggen dat daarin aan kinderen feiten òver het dansen van de samba geleerd worden die ze van buiten moeten leren. Aan het plezier van het dansen komen ze vrijwel niet toe. En dan is men verbaasd als er een motivatieprobleem of een probleem van 'danszwakke leerlingen' ontstaat.
De gedachte om de computer te gebruiken bij het creëren van een alternatief voor het traditionele onderwijs, komt niet uit de lucht vallen: kinderen hebben dit alternatief vaak zelf al gevonden, gezien de tijd die ze veelal achter de huiscomputer doorbrengen.

2 *Leren communiceren met de computer beïnvloedt en verandert het leren op andere terreinen.*

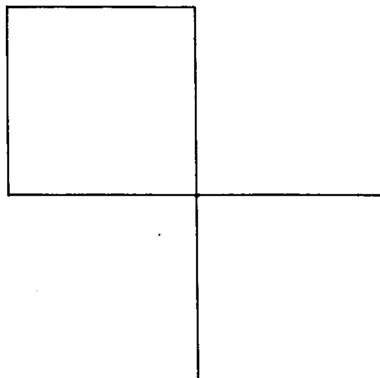
In zijn boek *Mindstorms*, dat wel de LOGO-bijbel genoemd wordt, geeft Papert veel voorbeelden van de rol die mentale modellen spelen bij het leren. Zelf gebruikte hij de ervaringen die hij als kind had

opgedaan met het spelen met tandwielen, bij het leren vermenigvuldigen. Bij vermenigvuldigstabellen 'zag' hij a.h.w. tandwielen in elkaar grijpen. Ook bij het oplossen van vergelijkingen steunde hij op dit mentale model. Papert's ideeën sluiten aan bij de theorie van Piaget en bij die van de wiskundige/psycholoog Skemp. In deze theorieën staat centraal dat mensen modellen in hun hoofd hebben, cognitieve schema's genoemd, met behulp waarvan nieuwe ervaringen geplaatst kunnen worden. Begrijpen kan dan opgevat worden als het opnemen van nieuwe ervaringen in een bestaand schema.
LOGO biedt de leerling dergelijke modellen of schema's die het leren op uiteenlopende terreinen kunnen ondersteunen.

Hoe werkt het?

In de door ons gebruikte LOGO-versie wordt uitgegaan van 5 basisopdrachten: V(oorruit), A(chteruit), L(inks), R(echts) en T(erug).
Op het beeldscherm is een driehoekig pijltje zichtbaar. Dit heet *de schildpad*. Bij oude LOGO-versies werd n.l. zonder computer gewerkt, maar met een speelgoed-schildpad die op de grond tekende.
Tikken we in: V 60, dan gaat de schildpad 60 stapjes vooruit en trekt intussen een lijntje op het scherm. L 90 veroorzaakt een draai naar links van 90°. We kunnen dus een vierkant tekenen m.b.v. de opdrachten:
V 60
L 90
V 60
L 90
V 60
L 90
V 60
L 90 (nu staat de schildpad weer in de oorspronkelijke stand)
Als we onderweg T intikken, wordt alles gewist en verschijnt de schildpad weer in zijn startpositie, midden op het beeldscherm.
In LOGO kunnen ook procedures gebruikt worden. Als we het bovenstaande rijtje opdrachten laten voorafgaan door TO VIERKANT en afsluiten met END, dan kent de computer voortaan de opdracht VIERKANT.

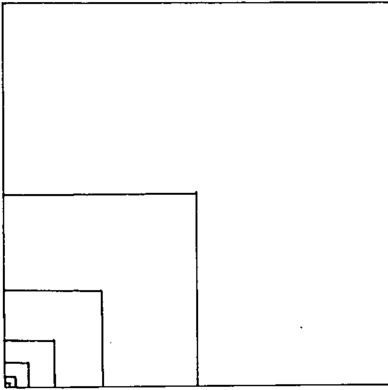
Toetsen we in:
VIERKANT
R 180
VIERKANT
dan krijgen we dus figuur 1.



Figuur 1

Het intikken van de 8 opdrachten die een vierkant opleveren, is natuurlijk vervelend werk. Het kan ook eenvoudiger:
TO VIERKANT
REPEAT 4[V 60 L 90]
END
Buiten de rechte haken staat het aantal malen dat de opdracht(en) binnen de haken moeten worden uitgevoerd. Zo maken we ook een cirkel:
TO CIRKEL
REPEAT 360[V 1 L 1]
END
We kunnen ook procedures definiëren met een variabele input. (In feite is dat ook al gebeurd bij de procedures V, A, enz.). We nemen bijv. de zijde van het vierkant als variabele:
TO VIERKANT :ZIJDE
REPEAT 4[V :ZIJDE L 90]
END
VIERKANT 60 levert nu een iets groter vierkant op dan VIERKANT 50.
LOGO is bovendien een recursieve taal. Een procedure kan binnen zijn eigen definitie voorkomen:
TO NEST :VAR
VIERKANT :VAR
NEST :VAR/2
END

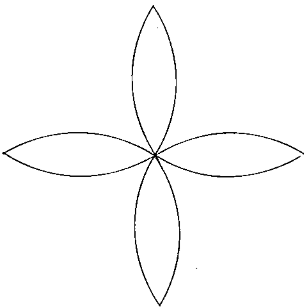
Het intoetsen van NEST 100 levert figuur 2 op.



Figuur 2

LOGO biedt de mogelijkheid om m.b.v. eenvoudige figuren, ingewikkelder tekeningen samen te stellen. Als we bijv. de bloem van figuur 3 willen maken, kunnen we beginnen met een procedure BOOG te definiëren. Met 2 bogen maken we een procedure BLAD. De procedure BLOEM zou er tenslotte zó uit kunnen zien:

TO BLOEM
REPEAT 4[BLAD R 90]
END



Figuur 3

Het LOGO-projekt

van de Vakgroep Didaktiek van de wiskunde van de Universiteit van Amsterdam

Ondanks de beweringen van Papert c.s. dat kinderen die nog nauwelijks kunnen lezen en schrijven, al met LOGO kunnen werken, durfden we het toch niet aan om met kleuters of met leerlingen uit de 1e klas van de lagere school aan de slag te gaan. We wisten van een geslaagd experiment op de SOL in Utrecht, waarbij met de hoogste klas van een lagere school gewerkt was.

We besloten te kiezen voor de 2e klas van de lagere school De Meent uit Holendrecht (Amsterdam-Z.O.), waarmee één van de studenten contacten had. De kinderen zouden vijf weken lang twee keer per week met de metro naar het wiskundegebouw komen. De klas werd bij de lessen in tweeën gesplitst; dit i.v.m. het aantal beschikbare (Commodore-)computers. Terwijl de ene helft een uur met LOGO werkte, gaf de juffrouw van de klas de andere helft rekenles, waarna de groepen wisselden.

Er kwam een kleurrijk gezelschap aan leerlingen het wat saaie mathematisch instituut binnen: Surinaamse, Turkse, Chinese en Nederlandse kinderen, een grote variatie aan nationaliteiten.

Al bij de eerste les bleken de resultaten al onze verwachtingen te overtreffen. De leerlingen, die in tweetallen achter de computer zaten, bleken niet alleen een uur lang vreselijk enthousiast bezig te blijven, maar kregen de zaak ook ongelooflijk snel 'in de vingers'. Het kostte eerst wat tijd om de toetsen te vinden, want de meesten hadden nog nooit achter een schrijfmachine gezeten. Toen die barrière genomen was, ging het snel. Ze rommelden eerst wat aan met kleine en grote getallen (bijv. V 8000), en nadat de kinderen een beetje gewend waren aan de LOGO-opdrachten, kostte het niet veel moeite om een vierkant op het scherm te krijgen. Daarbij moesten ze natuurlijk ook rechte hoeken maken. Als L 100 te groot blijkt te zijn, neem je eens wat kleiners. L 80 geeft een te kleine hoek. Zo ontdekten de kinderen 'experimenteel' dat een rechte hoek 90° is. In de daarop volgende lessen bleken ook de REPEAT-opdrachten en het definiëren van procedures door de meeste leerlingen begrepen te worden.

In dit verband moet opgemerkt worden, dat we met een Engelstalige LOGO-versie werkten. De basisopdrachten zoals FD (forward) konden eenvoudig in het Nederlands vertaald worden door nieuwe procedures te definiëren, bijv.:

TO V :AANTAL
FD :AANTAL
END

Bij de REPEAT-opdracht en de TO ... END-

constructie was dat veel minder simpel. Achteraf kunnen we zeggen dat dit geen fundamentele problemen heeft opgeleverd: de kinderen namen de Engelse termen gemakkelijk over. Wel was het prettig geweest als de foutmeldingen in het Nederlands kwamen. (Er schijnt trouwens in het najaar van 1985 een goede Nederlandse LOGO-versie op de markt te komen.)
Het was verbazingwekkend hoe snel de kinderen van elkaar allerlei trucjes leerden. Hoewel er nooit expliciet aandacht aan besteed was, kon de hele klas al snel m.b.v. de functietoetsen op het toetsenbord, overschakelen van tekst naar plaatje of naar tekst èn plaatje. Waarschijnlijk had één van de leerlingen dit ontdekt door zomaar wat met de toetsen te spelen (computerangst, hoezo?), waarna het 'weetje' snel de ronde deed. Het leek de sambaschool wel!
Al snel kwamen we tot de conclusie dat 'de leerstof', verwerkt tot een leerlingenboekje, uitgebreid moest worden, of het aantal lessen verminderd. Het werd tenslotte een combinatie van die twee oplossingen: we beperkten ons tot 8 lessen plus een speelse afrondende les, waarin de leerlingen de schildpad door een doolhof moesten loodsen.
Er ontstond een natuurlijke differentiatie. Sommige leerlingen konden na 8 lessen met enige moeite de REPEAT-opdracht gebruiken bij het maken van figuren, terwijl anderen echt met procedures binnen procedures werkten en de mogelijkheden van LOGO ten volle benutten.

Voor Cor!
Ik wou dat we nog tien lessen kregen.
Want als we nog m. meer lessen kregen was ik gek van computerles.
Ik vond het zo leuk.
De doolhof was erg moeilijk.
Soms was ik wel een druiloor.

De groetjes
van arwind!

De wiskundige aspekten van LOGO

Het is niet moeilijk een aantal wiskundige aspekten aan te wijzen die als vanzelf naar voren komen bij het werken met LOGO.
Spelenderwijs leren de leerlingen de eigenschappen van een vierkant, rechthoek, driehoek en cirkel. Het hoekbegrip wordt en passant meegenomen. Verder leren de leerlingen afstanden schatten en bovendien biedt LOGO een voorbereiding op het werken met coördinaten. Het probleem is echter, dat de waarde die LOGO voor het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben, met een dergelijke opsomming niet beschreven is.
Veel belangrijker is het zelfstandig bezig zijn van de leerlingen in een context met duidelijke wiskundige elementen. LOGO lijkt een uitstekende mogelijkheid te bieden voor een intuïtieve inleiding in de meetkunde, waarbij de leerlingen heel concreet, heel 'materiëel' bezig kunnen zijn.
Kortom, als voorbereiding op een meer wiskundig/theoretische benadering van meetkunde-onderwerpen zou LOGO goede diensten kunnen bewijzen, geheel in overeenstemming met leertheorieën als van Van Hiele, die wijst op het belang van concreet, materieel, zelfontdekkend bezig zijn in de eerste fase van een leerproces. LOGO zou daarom ook goed passen in de brugklas of de hoogste klas van de basisschool, als voorbereiding op het meetkundecurriculum in het voortgezet onderwijs.
Verder bestaat wiskunde leren natuurlijk niet alleen uit het verwerven van een aantal wiskundige begrippen, maar ook uit het leren problemen op te lossen, o.a. door het je eigen maken van algemene oplossingsmethoden (heuristieken). Werken met LOGO is voor een groot deel het oplossen van (door de leerling zelf gestelde) problemen. Een flink aantal heuristieken wordt spelenderwijs geleerd, omdat er voortdurend een beroep op gedaan wordt. Ik denk aan:

- het opdelen van een probleem in eenvoudiger problemen
- het verbinden van een nieuw probleem met een probleem dat je al kunt oplossen
- het onderweg toetsen van je hypothese, het controleren van jezelf
- het door (verstandig) proberen tackelen van een probleem

Bij dit alles biedt LOGO een hele snelle terugkop-

peling aan de leerling: alles wat je bedenkt, kun je n.l. direkt proberen en de computer laat je het resultaat ook meteen zien.
Maar misschien is het allerbelangrijkste van LOGO nog wel het affektieve aspekt: wiskunde en problemen oplossen blijkt leuk, spannend, uitdagend, interessant, etc. te zijn. De leerling kan een stuk creativiteit kwijt en kan zijn of haar eigen scheppingen ook aan anderen tonen. Wat dat betreft is LOGO een schitterend voorbeeld van integratie van creatieve en exacte vakken.
Veel van de genoemde voordelen van LOGO zijn helaas moeilijk hard te maken. Dat is ook een probleem bij veel onderzoek naar de resultaten van LOGO : er wordt veel vermoed, maar toon maar eens onomstotelijk aan dat leerlingen inderdaad beter problemen kunnen oplossen, meer lol in wiskunde krijgen, etc.
We hebben het plan opgevat om het LOGO-projekt volgend jaar te herhalen en dan te proberen meer greep op de leereffekten te krijgen. Het is dan ook belangrijk, dat we verder nadenken over de plaats van LOGO binnen het reken/wiskunde-curriculum op de school. Nu bleef nog onhelder hoe de resultaten van dit projekt gebruikt zouden kunnen worden in het verdere onderwijs aan deze leerlingen. Wel werd ons bij een eerste doordenking duidelijk, dat LOGO beter past in een onderwijs-aanpak, waarbij vaker met open problemen wordt gewerkt, dan in een vrij gesloten curriculum. Immers, de kracht van LOGO ligt in de ontwikkeling van het zelfstandig, creatief, probleemgericht werken en leren. Dat doet je snel denken aan de geluiden van de echte LOGO-fanaten die roepen dat LOGO een onderwijsfilosofie vertegenwoordigt, die mikt op een herziening van het onderwijs

Onderwijskundige observaties

Het LOGO-projekt leverde ons nog een groot aantal andere inspirerende ervaringen op van didaktische en onderwijskundige aard, die we hier niet onvermeld willen laten.
Het eerste dat opviel, was het reeds genoemde enthousiasme van de leerlingen. LOGO levert de leerling juist die uitdaging waar die zelf voor kiest: dat is inderdaad de idee van een natuurlijke leeromgeving. De leerling kan eens te hoog grijpen, maar mislukt nooit helemaal. Er komt altijd één of ander resultaat en als dat 'bijna goed' is, kan hij of zij het al knutselend verbeteren. (In vaktermen heet dat debuggen.) Het traditionele goed/fout-denken uit het onderwijs valt dus weg en daarmee ook een hoop faalangst, wiskunde-angst of computer-angst.
In dit verband dient opgemerkt te worden dat de twee studenten die de leerlingen begeleidden, zich op bewonderenswaardige wijze aan de LOGO-filosofie wisten te houden, dat de kinderen de kans moeten krijgen hun eigen weg door 'LOGO-land' te zoeken.
Ik geef een voorbeeld. De eerste les was bedoeld om de leerlingen te leren een vierkant te maken. Toen een groepje erg lang netwerken van schuine lijnen op het scherm bleef maken, grepen de studenten niet in. Toen de leerlingen echter tegen het einde van het lesuur gevraagd werd of ze nu ook een vierkant konden maken, bleek dit binnen een paar minuten op het scherm te komen. Kennelijk had het (ogenschijnlijk) ongerichte 'spelen' met LOGO duidelijke leereffekten opgeleverd. Bovendien waren en bleven de leerlingen nu veel enthousiaster dan wanneer ze zich van meet af aan aan de doelstellingen van de studenten hadden moeten aanpassen.
Wat dat betreft stelt het werken met LOGO misschien hogere eisen aan de leerkracht dan aan de leerlingen, want het is in het onderwijs toch niet gebruikelijk om leerlingen maar wat aan te laten rommelen. Dat dit bij LOGO gemakkelijker kan, komt door de specifieke mogelijkheden van de computer, m.n. door de snelle feedback die aan de leerling gegeven wordt: meteen als je iets intoetst, zie je het resultaat op het scherm. Je kunt, of liever gezegd, je moet jezelf dus van moment tot moment controleren. De leerkracht wordt daardoor vanzelf minder belangrijk.
De samenwerking tussen leerlingen wordt bij het werken met LOGO op een natuurlijke wijze gestimuleerd. Een belangrijke faktor daarbij is dat de leerlingen, als ze in tweetallen achter een computer zitten, wel *moeten* overleggen over de in te toetsen opdrachten. Maar ook de plaatjes die de leerlingen bij anderen op het beeldscherm zien, roepen al snel vragen op als: hoe doe je dit, hoe krijg je dat?
Belangrijk is verder, dat LOGO geschikt is voor mensen met verschillende leerstijlen. Er zijn men-

Het was heel leuk op computer les. En het was ook heel leuk dat jullie ons hielpen met. Ik zat samen met carlos aan een comput computer. Ik vond het heel leuk. Ik kan al een driehoek maken En een cirkel en het doolop vond ik heel leuk

Louis

sen die graag het geheel overzien en dat vervolgens in deelproblemen opdelen. Bij de bloem betekent dat: begin bij het hele plaatje en onderscheid steeds kleinere deelfiguren. Dat leidt tot een zgn. top-down benadering bij het programmeren.
Anderen werken graag 'van onderen af' (bottom up). Je kunt in LOGO ook beginnen met een eenvoudige figuur (bijv. een cirkel), en dan een wat gecompliceerder plaatje maken door bijv. cirkels te combineren, enz. Zo knutsel je dan een mooi eindprodukt in elkaar.
Een zeer confronterende ervaring was de volgende. Als we de leerlingen observeerden, terwijl ze (in tweetallen) zelfstandig met LOGO werkten, stonden we vaak versteld van hun motivatie en hun vermogen om gecompliceerde problemen in stapjes op te delen en via 'verstandig proberen' tot een oplossing te komen. Maar zodra één van de begeleidende studenten over hun schouders meekeek, vroegen ze bij alles hoe het moest en of hun idee goed was. Ze leken dan opeens veel dommer dan ze waren! Kennelijk had hun nog vrij korte schoolloopbaan hun al aardig duidelijk gemaakt dat 'leren voor jezelf' iets anders is dan 'leren voor de juf' en waren ze al aardig leerkracht-afhankelijk geworden!

LOGO in de opleiding van onderwijsgevenden

Ik hoop met het bovenstaande duidelijk gemaakt te hebben, dat LOGO m.i. interessante mogelijkheden biedt, zowel voor het basis- als voor het voortgezet onderwijs.
Een LOGO-projekt, zoals uitgevoerd in de vakgroep Didaktiek van de wiskunde van de Universiteit van Amsterdam, is daarnaast interessant voor de lerarenopleiding. A.s. onderwijsgevenden kunnen er een schat aan ervaringen en onderwijskundige of didaktische noties uit halen.
Het aardige is, dat LOGO voor vele leeftijdsgroepen geschikt is en zo goed als geen voorkennis veronderstelt. Studenten die opgeleid worden tot leraar kunnen dus zonder grote organisatorische problemen een aantal LOGO-lessen in een klas verzorgen en komen dan snel en op een natuurlijke wijze in aanraking met een aantal ideeën over onderwijs die wellicht gedeeltelijk haaks staan op die welke ze zelf als leerling hebben gevormd.
Verder dwingt het werken met LOGO je als onderwijsgevende tot een doordenking van je pedagogische opvattingen. Immers, is de motivatie van de leerlingen voor het werken met de computer een voldoende legitimering voor het opnemen van LOGO in het curriculum? Of is het juist gevaarlijk kinderen te jong te indoctrineren met de verworvenheden van deze technologische maatschappij? Hoe sta je tegenover het verschijnsel van de tienjarige computer-freaks? Hoe stimuleer je een kritische kijk op de computer en de randverschijnselen die daarmee te maken hebben?
Vragen te over die hier niet beantwoord behoeven te worden, maar die m.i. in een opleiding van onderwijsgevenden thuishoren.

***Over de auteur*:**

Fred Kortenhagen werkte na zijn wiskundestudie achtereenvolgens als leraar in het voortgezet onderwijs en als docent aan de Stichting Opleiding Leraren. Thans is hij vakdidacticus aan de Universiteit van Amsterdam. Hij promoveerde in 1983 op een proefschrift getiteld 'Leren reflecteren als basis van de lerarenopleiding'.

Statistiek en computers

Piet van Blokland

Inleiding

Statistiek neemt een marginale plaats in bij het wiskundeonderwijs in de onderbouw in Nederland. Meestal zijn er maar een paar wiskundelessen beschikbaar voor statistiek. Dit is jammer omdat er zeer veel goede argumenten zijn om meer aandacht aan statistiek te besteden. Een voorbeeld van zeer goed lesmateriaal voor statistiekonderwijs aan 12 tot 16 jarigen is 'STATISTICS IN YOUR WORLD'. Dit is lesmateriaal dat in Engeland ontwikkeld is. Statistiek houdt daar heel wat meer in dan het berekenen van modus, spreiding en mediaan. Ook in het nieuwe havo wiskunde programma krijgt statistiek gelukkig iets meer aandacht.

Statistiek leent zich uitstekend om computers bij te gebruiken. Er zijn dan ook een groot aantal computer-programma's beschikbaar voor statistische berekeningen. De computer geeft door de snelheid waarmee de berekeningen worden uitgevoerd de mogelijkheid om meer van het statistiek onderwijs te maken.
Door wiskunde studenten van de VU is lesmateriaal ontwikkeld voor de onderbouw havo waarbij zowel geprobeerd werd om zinvol statistiek te bedrijven als om de computer te integreren in de lessen. Dit lespakket is getest in 3-havo van de PASCAL scholengemeenschap in Zaandam.

Informatica-onderwijs en statistiek-onderwijs blijken veel gemeen te hebben, zowel inhoudelijk als qua organisatie op school. Natuurlijk zijn er ook verschillen.

1 Wat is statistiek?

De statistiek komt er niet zo best vanaf in de publieke opinie. Zie uitspraken als 'lies, damned lies and statistics' en 'met statistiek kun je alles bewijzen'. De argumenten voor zulke uitspraken zijn niet moeilijk te vinden. We kennen allen de manier waarop politici de kiezersonderzoeken bediscussiëren.

Maar wat is statistiek? Het is geen onderdeel van de wiskunde, noch is het een verzameling technieken die geleerd en gebruikt moet worden (hoewel beide misvattingen vaak voorkomen).
Statistiek is een praktisch vak dat gaat over het verkrijgen en verwerken van data met het oog op het doen van uitspraken die vaak verder gaan dan alleen de gegevens. Deze uitspraken hebben vaak de vorm van schattingen, betrouwbaarheids-intervallen, significantie-toetsen enzovoorts. Statistiek gaat ook over het produceren van goede data, dit houdt in het opzetten van goede experimenten en het nemen van de juiste steekproeven. Statistiek heeft zijn oorsprong in echte data en gaat over het verwerken van data in zeer vele toepassingen zoals de sociale, administratieve, medische, de natuurkundige gebieden.
Bij alle data is enige onzekerheid aanwezig; kansberekening geeft een manier om met deze onzekerheid om te gaan. Kansmodellen vormen de basis van de meeste statistische theorieën, kennis en begrip van kansberekening is nodig om een dieper inzicht in een statistische methode te krijgen.

2 Waarom statistiek onderwijzen aan 12-16 jarigen?

Er zijn verschillende redenen te bedenken om een vak als statistiek in het algemeen voortgezet onderwijs op te nemen. Bijvoorbeeld:

a Het vak levert een bijdrage aan de algemene ontwikkeling
b Het vak is nuttig voor later (in beroep of vrije tijd)
c Het vak is belangrijk voor de persoonlijke ontwikkeling van leerlingen van 12-16
d Het vak is een steun voor andere vakken op school
e Het vak legt een basis voor een groot aantal vervolgopleidingen

ad a) Statistiek is een integraal onderdeel van onze cultuur.
We leven in een wereld die steeds meer gebruikt maakt van statistische begrippen en steeds meer inzicht verwacht van haar burgers. Een typerend voorbeeld is de discussie die er geweest is over de effectiviteit van het polio-vaccin en of een kind ingeënt moest worden of niet. Een ander voorbeeld is de verplichting tot het dragen van veiligheidsriemen. Het waren statistische argumenten die de invoering moesten steunen. Nog een voorbeeld is het begrip 'kosten van levensonderhoud', en wat de consequenties ervan zijn voor de lonen. Een vierde voorbeeld is de kennis van de risico's van het roken en het krijgen van ziektes.
Men verwacht van mensen dat zij opiniepeilingen kunnen interpreteren, maar men is er vaak niet op bedacht wat een kleine verandering van de vraag voor effect kan hebben. Politieke argumenten over immigranten, misdaad, woningbouw en sociale veranderingen zijn vaak gebaseerd op het gebruik (en misbruik) van data. Misbruik is vaak heel duidelijk aanwezig in advertenties.
Medische beslissingen die gebaseerd zijn op statistieken kunnen ons allen aangaan. Dat we cyclamaten moeten verbieden omdat het erop lijkt dat ze onder sommige omstandigheden kanker bij ratten veroorzaken, of dat er jaarlijks bevolkingsonderzoeken moeten komen. Om onze leerlingen op deze wereld voor te bereiden moeten we ze een aantal zaken leren, bijvoorbeeld het interpreteren van enquêtes, leren leven met onzekerheid, presenteren en het trekken van conclusies uit data, het gebruik van schattingen (zelfs als ze niet helemaal accuraat zijn), het leren wat gemiddeldes wel en niet 'zeggen' en informatie uit tabellen en uit grafieken kunnen lezen.

ad b) i) Statistiek is een essentieel onderdeel van rekenvaardigheid.
De meeste alledaagse toepassingen van rekenen (uitgezonderd het winkelen) zijn van statistische aard. Schatting van de kosten, het bepalen van de juiste hoeveelheid behang, en bijvoorbeeld reisduur gebeuren met een idee van 'variatie' en een bepaalde mate van onnauwkeurigheid in het hoofd.
Bij veel gelegenheden worden cijfers genoemd, maar er worden geen vragen over gesteld. Heel weinig worden leerlingen aangemoedigd om de bron van de data op te sporen, om zich af te vragen of het cijfer wel of niet betrouwbaar is, of de data juist en volledig zijn of dat de data selectief gekozen zijn voor een of ander propaganda doel?
Slechts heel weinig cijfers staan op zich zelf. Een krantekop met '21 doden op de weg gisteren' zegt weinig. Het is betreurenswaardig dat er 21 zijn overleden, maar de nieuwswaarde wordt bepaald door andere factoren: nieuw, afwijkend, opvallend. Een kritische houding ten opzichte van data ontstaat alleen maar door zelf ervaringen op te doen met het verzamelen en interpreteren van data in verschillende contexten.

ad b) ii) Statistiek speelt een belangrijke rol bij het werk van veel mensen.
Juist de laatste jaren is de behoefte aan informatie enorm toegenomen. Voor veel mensen bestaat hun arbeid uit het verzamelen van informatie, die daarna vast gelegd kan worden in tabellen, grafieken enzovoorts. Zo zal de toekomstige manager steeds meer op grond van cijfers de ontwikkelingen moeten interpreteren.

ad c) Een studie in de statistiek ondersteunt de persoonlijke ontwikkeling.
Zoals hierboven is aangegeven helpt de statistiek bij het maken van een simpel model van een context en geeft het een dieper inzicht in het verschijnsel en het belang van variatie. Het helpt de leerling omgaan met onzekerheid. Door het omgaan met enquêtes krijgt de leerling meer gevoel voor het probleem de waarheid te weten te komen en dat eerlijk te rapporteren. Dit kan de leerling helpen om later zelf ook kritischer verslagen en andere documenten te lezen, speciaal wat betreft de betrouwbaarheid en de geloofwaardigheid. Een studie in statistiek zou moeten bijdragen tot het vergroten van het kritisch beoordelingsvermogen. Bovendien wordt de leerling geconfronteerd met reële problemen uit de wereld van alle dag. Een data-benadering van veel onderwerpen kan een leerling confronteren met zijn vooroordelen, en hem consistenter laten denken over zijn argumenten en hem eerlijker laten omgaan met numerieke informatie. Hij kan niet meer zo gemakkelijk een vooroordeel of een foute positie handhaven als de data duidelijk aantonen dat hij fout was. Dit kan

speciaal het geval zijn bij discussies over immigratie, misdaad, woningbouw en dergelijke.
Statistische redeneringen gecombineerd met andere argumenten (bijvoorbeeld ethische) helpen om leerlingen meer gedegen beslissingen te laten nemen.

ad d) Statistiek speelt een belangrijke rol in veel vakken op school.
Er is een duidelijke toename in het kwantificeren bij veel schoolvakken. Dit is al zo in de onderbouw, maar nog veel meer in de bovenbouw en zeker in het vervolgonderwijs. Voorbeelden:
Biologie: gebruik van statistiek bij genetica, het opzetten van experimenten met een controle groep, het bepalen van hoeveelheden dieren.
Natuurkunde: het zo nauwkeurig mogelijk meten, de variatie die ontstaat als je iets vaker meet, het gebruik van het gemiddelde om de nauwkeurigheid van de voorspelling te vergroten.
Aardrijkskunde: het gebruik van volkstellingen, onderzoek naar natuurlijke hulpbronnen en voor hoelang dat voldoende is, groei en soorten steden, bevolkingsgroei en het effect van geboorte en sterfte-cijfers.
Economie: de economie leraar geeft les over het prijsindexcijfer, lezen en interpreteren van tabellen, allerlei economische maten om de economie van een land meetbaar te maken en om trends naar de toekomst te onderzoeken.

ad e) Statistiek voor 12-16 jarigen legt een basis voor vervolgopleidingen.
Zeer veel vervolgopleidingen besteden aandacht aan statistiek. Het is een vaak voorkomende klacht van leraren op dit niveau dat de leerlingen niet de tijd hebben om de technieken goed te bestuderen. Begrippen moeten erin gestampt worden en er wordt geen tijd gegeven om de begrippen te laten rijpen. Er is een grote verleiding om statistiek als een kookboek te behandelen waardoor het begrip van leerlingen zich niet ontwikkelt. Veel van de technieken die gebruikt worden, zijn niet zo moeilijk om te begrijpen en enige aandacht op een eerder moment maakt het later makkelijker.

3 Lesmateriaal

Het lesmateriaal dat het Schools Council Project on Statistical Education ontwikkeld heeft, '*Statistics in your world*' bestaat uit 27 dunne boekjes. Deze boekjes zijn geschreven voor 12 tot 15 jarigen. Behalve dat veel statistische onderwerpen behandeld worden, worden ook een groot aantal toepassingen van de statistiek besproken. Voorbeelden van toepassingen zijn: de volkstellingen, roken en gezondheid, het testen van een nieuwe ademtest op alcohol, gelijke beloning van mannen en vrouwen. In bijna alle boekjes worden echte waarnemingen gegeven. Bijvoorbeeld: de echte cijfers over de groei van een luchthaven. Nog een heel belangrijk facet is, dat de boekjes niet stoppen bij de berekening. Maar de leerling wordt expliciet naar de context gevraagd. In het voorbeeld van de luchthaven' worden zowel de speeches van de lokale bevolking als de speech van de baas van de luchthaven gegeven. De leerlingen wordt vervolgens gevraagd om met behulp van de cijfers commentaar te geven op de speeches (in het boekje *Phoney figures*).
Het eerste doel achter dit statistiekmateriaal is dan ook dat kinderen bewust worden van de rol van de statistiek in de gemeenschap en dat zij die rol waarderen. Dat wil zeggen dat zij iets zouden moeten weten van de vele verschillende gebieden waar statistiek wordt toegepast.
Het uitgangspunt van dit materiaal is dat technieken niet geïsoleerd moeten worden aangeboden, maar dat het statistiek-onderwijs zowel een redelijk overzicht moet geven van de technieken, als van de toepassingsgebieden. Een indruk kunt u misschien krijgen uit de volgende overdrukken.

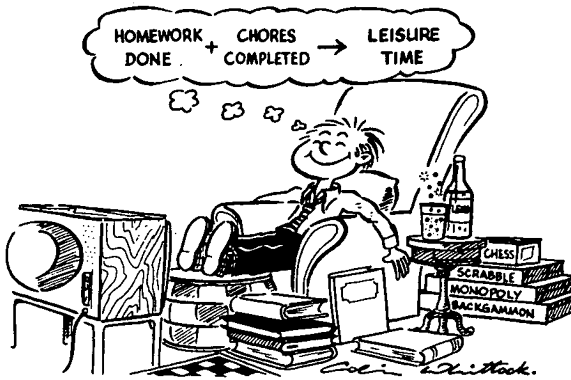
Table 1 gives figures about fires in the home. Fire brigades were called to put them out. Many tables in statistics look like this. Some people find them hard to read. In this unit you will learn how to make tables and how to read and understand them. By the end you should be able to make more sense of them.

Table 1 *Domestic fires in the United Kingdom: by cause and room of origin, 1976*

Cause	Number started in: Kitchen	Bed-room[1]	Living room	Hall[2]	Roof space	Else-where[3] or not known	Total[4] number of fires
Cooking	17226	174	—	—	—	—	17000
Space heating	504	1400	2352	168	—	1176	6000
Smoking materials	342	1482	1216	76	—	684	4000
Children	132	990	330	165	33	1650	3000
Wiring installations	403	403	310	527	155	1302	3000
Chimneys	153	272	289	17	255	714	2000
TV and radio	17	51	1547	—	—	85	2000
Other	2840	3124	1704	710	426	5396	14000
Total all causes	21617	7896	7748	1663	869	11007	51000

(Source: *Social Trends*, No. 8, 1977, page 197)

1 Includes bed-sitting rooms
2 Includes stairs and corridors
3 Includes fires which started outside and spread to the building
4 Totals have been rounded to the nearest thousand.



Leisure Time

Some Questions

We all have some time to spend as we want. In the future we expect people to have even more spare time. We want to make the best use of this leisure time.

Think about these questions:

What do you do in your spare time?
How long do you spend watching television?
Which programmes do you prefer?
What games do you play?
What kind of books do you read?

a Write down some things you do in your spare time.
b Who would like to know which books you read?
c Why?

On page R1 there is a section called 'My Diary'. During the next seven days note down the amount of time you spend each day watching television and the amount of time you spend reading. Do not count time reading schoolwork.

4 Een statistiek-pakket voor 3-havo

Door wiskunde studenten van VU is lesmateriaal gemaakt voor 6 lessen statistiek. Het lespakket is speciaal ontwikkeld voor leerlingen van 3-havo die geen wiskunde in hun pakket nemen. Het geeft een bijna volledige behandeling van de statistiek-stof voor de onderbouw havo. Geprobeerd is om een aantal ideeën uit het *Statistics in your world* materiaal te integreren en om de computer te gebruiken. De lessen zelf werden gegeven door 3 studenten van de nlo de vrije leergangen. De afsluiting van de lessen is een eigen onderzoek van de leerlingen. De leerlingen waren hierop voorbereid doordat ze enerzijds kennis hadden genomen van een aantal elementaire statistische technieken zoals histogram en anderzijds aandacht besteed was aan het goed formuleren van de vragen. Vooral het eigen onderzoek bleek goed aan te slaan bij de leerlingen. Als onderwerpen voor eigen onderzoek werden bijvoorbeeld genomen:
make-up, kauwgom, verliefd, uitgaan, computers, mode, muziek, computers. Als onderzoeksgroep hadden zij meestal de leerlingen in de kantine genomen. De leerlingen moesten een verslag maken van hun onderzoek. Met behulp van de computer konden zij histogrammen, kruistabellen, frekwentietabellen maken.
De computer speelt al tijdens de cursus een rol. De computer maakte bijvoorbeeld histogrammen van de lengte van de leerlingen in de klas.
Leerlingen vinden het werk met de computer interessant. Vooral het verwerken van hun eigen gegevens had veel belangstelling. Aangezien het invoeren en verwerken van de gegevens van een klas toch nogal wat tijd kost moet men minimaal over 6 computers met disk-drive en 2 printers beschikken. Indien er niet zoveel computers of printers zijn, moeten de leerlingen de gegevens buiten de lesuren in de computer invoeren.

5 Argumentatie om de computer te gebruiken bij het statistiek onderwijs

Op dit moment gebeurt bijna alle verwerking van gegevens van datasets van enige omvang op de computer. Veel studenten van de sociale wetenschappen worden al onderwezen in het gebruik van statistische pakketten als SPSS en BMDP.
Een van de moeilijkheden bij statistiek-onderwijs is juist dat het verwerken van reële data zoveel tijd kost. Door dit werk met de micro te doen, kan meer tijd over blijven voor de essentiële zaken van de statistiek, namelijk het opzetten van het onderzoek en het interpreteren van de resultaten. Bovendien is een gevolg van het feit dat de gegevens van het onderzoek in de computer staan, dat het mogelijk is veel meer met de gegevens te doen. Bijvoorbeeld een kruistabel maken met de hand is een lastig karwei, met de computer is het een druk op de knop.

Door het gebruik van de computer krijgt de leerling een uitstekende gelegenheid om zijn eigen onderzoek op te zetten en te verwerken. Ervaringen wijzen erop dat leerlingen grote belangstelling hebben voor hun zelf verworven gegevens. De kracht van enquêtes is wel bewezen.
Het is voor leerlingen belangrijk om inzicht te krijgen in management informatie. Veel management informatie is statistische informatie. Het zelf opzetten van een enquête en de data invoeren op de computer en pas daarna bepalen welke informatie uit de data gehaald moet worden een voor leerlingen bruikbaar beeld oplevert, hoe een (toekomstige) manager met informatie omgaat.

6 Overeenkomsten en verschillen tussen statistiek-onderwijs en informatica-onderwijs.

a Zowel statistiek als informatica zijn multidisciplinair. Bij bijna alle vakken speelt statistiek een belangrijke rol. Informatica gaat ook dwars door allerlei vakken heen.

b De wiskunde staat er een beetje halfslachtig tegenover. Enerzijds is het duidelijk dat wiskunde een belangrijk hulpmiddel is voor beide vakken en dat wiskundige technieken essentieel zijn voor een dieper begrip van beide vakken. Anderzijds zijn het juist de toepassingen buiten de wiskunde, die deze vakken belangrijk maken.

c Het maatschappelijk belang is enorm. In het begin van de les is al aangetoond hoe belangrijk statistiek is in het maatschappelijk leven. Dat informatica belangrijk is, wordt bijna iedere dag in de media betoogd.

d Ontwikkeling van de laatste 20 jaar. Zowel computerkunde als statistiek zijn vakken van heel recente datum. Geen van beide vakken hoorden 15 jaar geleden tot het standaardpakket van een wiskundige.

Er zijn ook een aantal verschillen:

a Informatica is belangrijker voor de werkgelegenheid van veel mensen

b Er is een groot verschil in de belangstelling van de media

7 Beschrijving van het gebruikte statistiek-pakket

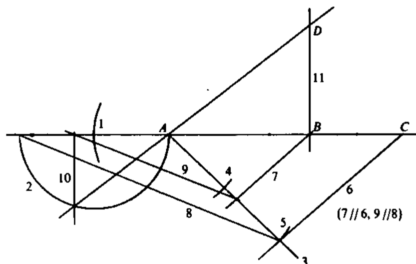
Het gebruikte statistiek-pakket is een zelf geschreven pakket. De belangrijkste redenen om zelf iets te programmeren, was dat de twee pakketten die op de VL-VU aangekocht waren, een heel gebruikersonvriendelijke invoer van de gegevens hebben. Eén van de belangrijkste eisen aan een statistiekpakket voor het onderwijs, is dat de invoer van de gegevens gemakkelijk is en dat de gebruiker afgeschermd blijft van ingewikkelde statistische termen. De laatste eis is voor het onderwijs een heel belangrijke, immers de leerling moet het gevoel krijgen het pakket te beheersen en voor de leraar is het ook bijzonder vervelend om met een statistiek-pakket in de klas te werken waarover hij de meeste vragen niet kan beantwoorden.
Op de TULIP kan het programma per persoon 119 vragen bevatten. Op de TRS-80 zijn 63 vragen mogelijk. Er kunnen maximaal 2000 proefpersonen meedoen. Behalve de vragen, waarop slechts één antwoord mogelijk is, is het pakket ook in staat om vragen te verwerken waarop meer dan een antwoord gegeven wordt: bijvoorbeeld de vraag Welk weekblad lees je? Sommige mensen lezen wel 3 weekbladen.
De statistische technieken die in het programma zitten zijn:
frekwentie-tabellen,
histogrammen,
gemiddelde, spreiding, mediaan,
boxplot,
kruistabel,
regressie-vergelijkingen en een scatter-diagram,
multiple regressie,
wilcoxon rangsom-toets,
wilcoxon rangteken-toets,
lineaire discriminant analyse,
Kendall's tau en Spearman's rho,
Lorents kromme
Verder bestaan er nog een aantal data-manipulatie mogelijkheden. Het is mogelijk om, nadat al een aantal proefpersonen zijn ingevoerd, vragen toe te voegen of weg te halen. Ook kunnen lineaire transformaties op de antwoorden van de vragen worden toegepast.
Het enquête programma draait op TRS-80 en op de TULIP. Op de Trs-80 is er een STAR-printer of een MICRO-LINE printer nodig. Op de TULIP kan een EPSON-printer.
Het programma is voor 15 gulden verkrijgbaar bij de V.L-V.U., Wildenborch 6, Diemen.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Oplossingen

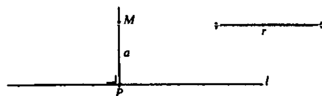
533 Construeer met behulp van liniaal en niet-verstelbare passer de middelevenredige tussen de lijnstukken AB en BC.



Lijnstuk BD is de gevraagde middelevenredige.
Om aan te tonen dat we nu elke constructie die uitvoerbaar is met liniaal en passer ook kunnen uitvoeren met liniaal en niet-verstelbare passer moeten we de uitvoerbaarheid op de laatste manier van twee constructies aantonen, namelijk:

a Construeer de snijpunten van twee cirkels waarvan de middelpunten en de stralen gegeven zijn.
Dit kunnen we reeds, want we kunnen een driehoek construeren waarvan de zijden gegeven zijn.

b Construeer de snijpunten van een rechte lijn l met een cirkel waarvan het middelpunt M en de straal r gegeven zijn.



S is een snijpunt $\Leftrightarrow PS^2 = r^2 - a^2 = (r - a)(r + a)$.
We construeren dus de middelevenredige tussen $r - a$ en $r + a$, kennen dan PS en kunnen de beide snijpunten vinden.
Wie klassiek een cirkel wenst te construeren, zal zich met niet-verstelbare passer tevreden moeten stellen met het vinden van middelpunt en straal.

534 Gevraagd vier verschillende natuurlijke getallen A, B, C en D te vinden waarvoor $A^2 - B^2 = B^2 - C^2 = C^2 - D^2$.
Onderstel A, B, C en D voldoen aan de vraag en ggd$(A, B, C, D) = 1$. Dan geldt

$A^2 + C^2 = 2B^2$ (1)

$A^2 - B^2 = C^2 - D^2$ (2)

Hieruit volgt dat A, B, C en D oneven zijn.
Uit (2) volgt:
$(A + B)(A + B) = (C + D)(C - D)$
Onderstel ggd$(A + B, C + D) = 2x_1$ en
ggd$(A - B, C - D) = 2y_1$.
Dan zijn er getallen x_2 en y_2 zo, dat
$A + C = 2x_1x_2$, $A - C = 2y_1y_2$, $B + D = 2x_1y_2$,
$B - D = 2x_2y_1$ en dus
$A = x_1x_2 + y_1y_2$
$B = x_1y_2 + x_2y_1$
$C = x_1x_2 - y_1y_2$
$D = x_1y_2 - x_2y_1$
Omdat A, B, C en D oneven zijn, is precies één van de getallen x_1, x_2, y_1, y_2 even. Voor het vervolg doet het er niet toe welke dit even getal is. Stel x_1 is even, en x_2, y_1 en y_2 dus oneven.
Uit (2) volgt:
$x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 = x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2$
$(x_2^2 - y_2^2)x_1^2 - 2x_2y_1y_2 \cdot x_1 + (y_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2) = 0$
Omdat x_1, x_2, y_1, y_2 natuurlijke getallen zijn, is de discriminant hiervan een kwadraat. Dus is:
$y_1^2(x_2^4 - x_2^2y_2^2 + y_2^4)$ een kwadraat
$x_2^4 - x_2^2y_2^2 + y_2^4$ een kwadraat.
Stel $\frac{x_2}{y_2} = \lambda$. Dan is λ rationaal en $\lambda^4 - \lambda^2 + 1$ het kwadraat van een rationaal getal. Teller en noemer van λ (onvereenvoudigbaar geschreven) zijn oneven.
Stel $\lambda^4 - \lambda^2 + 1 = k^2$ (k rationaal). Dan is $\lambda^4 - k^2 = \lambda^2 - 1$
Stel $\lambda^2 + k = t$ (t rationaal).
Dan is $\lambda^2 - k = \frac{\lambda^2 - 1}{t}$
en dus
$2\lambda^2 = t + \frac{\lambda^2 - 1}{t}$
$\lambda^2 = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}$
Stel $t = \frac{p}{q}$ (onvereenvoudigbaar). Dan is
$\lambda^2 = \frac{p^2 - q^2}{2pq - q^2}$ (3)
Uit het onvereenvoudigbaar zijn van $\frac{p}{q}$ volgt dat ook deze breuk onvereenvoudigbaar is. Teller en noemer ervan zijn dus oneven kwadraten. Omdat $p^2 - q^2$ oneven is, zijn er twee mogelijkheden:
a p even en q oneven
b p oneven en q even.
In het eerste geval is $p^2 - q^2$ een 4-voud + 3 en dat kan geen kwadraat zijn. Dus is q even. Dan is de noemer van (3) even. Contradictie.
Er zijn dus geen getallen A, B, C en D die aan de vraag voldoen.

535 Een kubus met ribben p moet door een minimaal aantal vlakke sneden verdeeld worden in p^3 kubussen met ribben 1. De verkregen delen mogen daarbij gestapeld worden. Hoeveel sneden zijn minimaal nodig?
Neem eerst een lijnstuk met lengte p en verdeel dit door een

minimaal aantal sneden in p lijnstukken met lengte 1. De verkregen delen mogen gestapeld worden.
Als $p = 2^n$, dan is het aantal benodigde sneden n.
Is $2^n < p \leqq 2^{n+1}$, dan is het benodigde aantal $n + 1$.
Realisatie is als volgt mogelijk. Verdeel het lijnstuk met lengte p in twee delen waarvan de lengten gelijk zijn of 1 verschillen. Neem een van de delen resp. het grootste deel. Behandel dit op dezelfde manier. En ga zo verder, totdat de beide stukken lengte 1 hebben. De reeds verkregen delen worden steeds meegestapeld, zodat dan alle verkregen delen lengte 1 hebben.
Neem nu de kubus. Verdeel een van de ribben op bovengenoemde manier in twee delen en breng een vlak aan door het verdeelpunt loodrecht op de ribbe. De kubus wordt in twee delen verdeeld. De afmetingen van de beide delen resp. het grootste deel zijn p, p en q, waarin $q = \frac{1}{2}p$ resp. $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$. Verdeel nu een van de drie ribben, het doet er niet toe welke, op dezelfde manier en breng weer een snijvlak aan door het deelpunt loodrecht op de ribbe. Ga zo door totdat kubussen met ribben 1 verkregen worden.
Neem aan dat $2^{n-1} < p \leqq 2^n$. Noem de kubus $ABCD.EFGH$. Er zijn dan n snijvlakken aangebracht op de ribbe AB, n loodrecht op de ribben AC en n loodrecht op de ribben AD. Dus in totaal $3n$. (Wie een andere verdeling probeert, zal een groter grootste stuk krijgen en zal dan geen kleiner minimaal aantal benodigde sneden kunnen krijgen.) Het gevraagde minimum is dus $3n$.

Mededelingen

22e Nederlands Mathematisch Congres

Onder de auspiciën van het Wiskundig Genootschap wordt op dinsdag 1 april en woensdag 2 april 1986 het *Tweeëntwintigste Nederlands Mathematisch Congres* op de Technische Hogeschool Twente in Enschede gehouden.
Het programma bevat onder meer:
- Openingsvoordracht 'Jagen op groepen in Twente' (R. Martini)
- Aangemelde voordrachten
- Symposium 'Joseph Louis Lagrange (geboren 1936)'
- Symposium 'Navier-Stokes'
- Symposium 'Meer complexe veranderlijken'
- Symposium 'Numerieke oplossing van gewone differentiaalvergelijkingen'
- Symposium 'Vakdidaktiek: bijdragen vanuit de geschiedenis van de wiskunde' (2 april 's ochtends)
- Symposium 'Vakdidaktiek: ruimte voor meetkunde' (2 april 's middags)
- Slotvoordracht 'Het handelsreizigersprobleem: complexiteit en algoritmen' (J. K. Lenstra)
- boekexposities, films over wiskunde, enz.

Aanmelding en kosten
Het congresgeld bedraagt *f* 20,– voor leden WG, *f* 25,– voor niet-leden en *f* 10,– voor studenten. De prijs voor de lunch is *f* 10,– per keer. U kunt zich als deelnemer opgeven door het gelijktijdig overmaken van de kosten op gironr. 5036818 of bankrekening ABN rekeningnr. 59.09.88.352 en het aanmelden bij: Organisatiekommissie 22e Nederlands Mathematische Congres, t.a.v. mevr. C. Hassing, T.H. Twente, Onderafdeling TW, Postbus 217, 7500 AE Enschede.

Kalender

27-29 augustus 1986: Utrecht, Congres 'New Trends in the History of Science'.

Studiedag Hasselt, Provinciale Normaalschool 26 april 1986

Op zaterdag 26 april 1986 organiseert de VVWL een studiedag in de Provinciale Middelbare Normaalschool, Elfde-Liniestraat 24, 3500 Hasselt.

Agenda
9.30 ontvangst
10.00 opening door de voorzitter
10.15 Mathieu Stinissen (Rijksnormaalschool Hasselt): *Ervaringen met het nieuwe leerplan meetkunde in de observatiecyclus van het Rijksonderwijs*
11.20 Paul Bonnyns (Koninklijk Atheneum Leopoldsburg): *Verkiezingen en wiskunde:* thema voor VBSO en L.C.
12.45 lunch in het provinciaal studentenhuis - rechtover de Normaalschool
14.30 derde spreekbeurt (voorlopig nog niet definitief vastgelegd)
16.00 sluiting

Examenbesprekingen lbo, mavo, havo, vwo 1986

Voor alle besprekingen geldt dat de door de CEVO vastgestelde normen *niet* gewijzigd mogen worden. Binnen de geldende normen kan men verfijningen afspreken.
Dit jaar doen de leerlingen van 52 scholen voor vwo examen wiskunde A. De N.V.v.W. organiseert daarom op drie plaatsen een bijeenkomst: Eindhoven, Rotterdam en Zwolle. *Alle* docenten wiskunde uit havo en vwo zijn daar welkom. Ter plaatse zijn voldoende exemplaren van de opgaven voorradig. Volgend jaar zullen de besprekingen van het examen wiskunde A landelijk meer gespreid worden.

Examenbesprekingen wiskunde op donderdag 1 mei 1986
Lbo-c, mavo-c en mavo-d van 15.00 h tot 18.00 h.

Plaats	*Adres van de school*
Alkmaar	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38

Gespreksleiders c:	T. Dunselman, Burg. Albertiplein 11, 1561 WH Krommenie, 075-28 40 42
d:	C. Gaykema, Crijnssenstraat 48 III, 1058 XX Amsterdam, 020-12 91 85
Amersfoort	Andreasmavo Ringweg Koppel 7 3813 BA Amersfoort 033-72 01 03
Gespreksleiders c:	J. Beckman, Bloemengaard 42, 3941 TC Doorn, 03430-1 40 16
d:	J. C. Vos, Godivastraat 9, 3813 WE Amersfoort, 033-75 17 19
Amsterdam	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 1068 MR Amsterdam 020-19 83 99
Gespreksleiders c:	E. G. Doevendans, Clara Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020-36 20 49
d:	E. G. Doevendans, Clara Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020-36 20 49
Arnhem	Thorbeckescholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28
Gespreksleiders c:	M. Hondelink, Het Elferink 77, 7478 CB Diepenheim, 05475-13 22
d:	L. Hoekstra, Rondenhof 40, 6662 ZW Elst, 08819-7 38 60
Breda	Lhnoschool Groene Woud Groene Woud 2 4834 BC Breda 076-65 62 50
Gespreksleiders c:	A. Braat, Albastdijk 48, 4706 AN Roosendaal, 01650-3 72 42
d:	W. van Gaans, Basaltdijk 8, 4706 DL Roosendaal, 01650-4 31 65
Deventer	Mr. van Marle Scholengemeenschap Ludgerstraat 1 7415 DV Deventer 05700-2 90 00
Gespreksleiders c:	K. Selles, Meerkoet 45, 7423 CM Deventer, 05700-5 07 24
d:	J. F. Laaper, Weerdslag 120, 7206 BW Zutphen
Eindhoven	Penta College Gen. van Merlenstraat 5 5623 GC Eindhoven 040-43 52 30
Gespreksleiders c:	J. van Hees, D. v.d. Konijnenbergln. 23, 5591 PZ Heeze, 04907-15 27
d:	J. C. G. W. van den Berg, Haakakker 26, 5731 EZ Mierlo, 04927-6 17 44
Emmen	Openbare S.G. De Dissel Smedingeslag 1 7824 HK Emmen 05910-2 34 56
Gespreksleiders c:	J. F. Struik, Liniekampen 12, 7873 BT Odoorn, 05919-1 27 90
d:	R. Zwierstra, Oringerbrink 23, 7812 JR Emmen, 05910-1 37 11
's-Gravenhage	Daltonmavo Louis Hage Amerongenstraat 1 2546 VV 's-Gravenhage 070-29 46 93
Gespreksleiders c:	C. J. M. Dirks, Vogellaan 67, 2771 KJ Boskoop, 01727-77 58
d:	C. J. Jol, Kon. Wilhelminalaan 434, 2274 BJ Voorburg, 070-85 27 74
Groningen	Gemeentelijke S.G. Zuid Parkweg 128 9727 HD Groningen 050-26 03 45
Gespreksleiders c:	S. Kooiman, Illegaliteitslaan 11, 9727 EA Groningen, 050-25 12 89
d:	J. C. Borst, Bonenakker 51, 9932 JD Delfzijl, 05961-2 54 64
Haaksbergen	R.K. Mavo De Raahorst Van Brakelstraat 1 7482 VV Haaksbergen 05427-1 32 85
Gespreksleiders c:	G. Nijenmanting, Verdistraat 22, 7482 TM Haaksbergen, 05427-1 32 13
d:	C. Th. J. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg, 08350-2 43 37
Haarlem	R.K. Mavoschool Jeroen Overtonstraat 42 2024 XK Haarlem 023-25 17 49
Gespreksleiders c:	R. B. de Haas, Uiverstraat 27, 1171 GX Badhoevedorp, 02968-49 03
d:	R. M. L. M. Born-Kil, Nic. Beetslaan 20, 1985 HH Driehuis, 02550-2 24 68
's-Hertogenbosch	Scholengemeenschap De Dommel Emmaplein 19 5211 VZ 's-Hertogenbosch 073-13 56 74

Gespreksleiders c: M. Bekkers, Vorsenpoel 158, 5283 ZN Boxtel, 04116-7 71 19
d: F. J. Mahieu, Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel, 04116-7 34 68

Hoogezand
Dr. A. Jacobs Scholengemeenschap
Nieuweweg 4
9603 BH Hoogezand
05980-2 68 00
Gespreksleiders c: E. G. van den Handel, Ceresakker 27, 9781 KK Bedum, 05900-1 32 68
d: W. Visser, Amalia van Solmslaan 11, 9602 GM Hoogezand, 05980-2 03 03

Leeuwarden
Mavo Nylân
Prinsessenweg 4
8931 EG Leeuwarden
058-88 42 02
Gespreksleiders c: F. de Boer, Klaas Kuikenstraat 7, 8802 VB Franeker, 05170-36 10
d: J. Tuinstra, De Finne 36, 9036 KK Menaldum, 05185-15 17

Middelburg
Oranje Nassauschool
Oranjelaan 11
4332 VA Middelburg
01180-2 52 74
Gespreksleiders c: C. J. Beimers, Duunmede 49, 4337 BD Middelburg, 01180-3 51 16
d: A. Kammeraat, Van Strijenstraat 19, 4371 CH Koudekerke, 01185-22 31

Panningen
Bouwens van der Boye College
Minister Calsstraat 10
5980 AB Panningen
04760-30 31
Gespreksleiders c: J. K. M. Verheesen, Brantstraat 13, 6112 AH Sint Joost, 04754-54 87
d: W. J. H. Crijns, Den Roover 17, 5953 BM Reuver, 04704-19 46

Rotterdam
Chr. Mavoschool Het Lage Land
Kromhoutstraat 3-5
3067 AE Rotterdam
010-20 53 93
Gespreksleiders c: A. B. T. Hazenberg, Kalverdans 27, 2771 RR Boskoop, 01727-37 74
d: L. Bozuwa, Abeelstraat 7, 3329 AA Dordrecht, 078-16 39 46

Sittard
Scholengemeenschap St. Catharina
Odasingel 90
6131 GZ Sittard
04490-1 75 86
Gespreksleiders c: E. M. A. M. van der Vring, Wehrerweg 221, 6137 LC Sittard, 04490-1 19 05
d: J. J. H. Plum, Maastrichterweg 16, 6381 RZ Ubach over Worms, 045-31 29 08

Utrecht
Mavo/Leaoschool Lunetten
Kampereiland 6
3524 CZ Utrecht
030-88 35 51
Gespreksleiders c: J. H. Sybrandy, Berkelwijk 31, 3831 MN Leusden, 033-94 27 70
d: R. J. Roukema, Buntlaan 34, 3951 VN Maarn, 03432-28 95

Zwolle
Thorbeckescholengemeenschap
Dr. van Heesweg 1
8025 AB Zwolle
038-54 66 77
Gespreksleiders c: G. J. Scheppink, Merelstraat 102, 7731 XE Ommen, 05291-35 26
d: S. R. Zwaan, Krulmate 57A, 8014 KG Zwolle, 038-65 25 30

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op donderdag 1 mei 1986 van 16.00 h tot 18.00 h.

Plaats	*Adres van de school*
Amsterdam	Sint Nicolaas Lyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51
Gespreksleider:	C. Bouwmeester Herengracht 14 1441 EW Purmerend 02990-2 37 74
Dongen	Dr. Schaepmancollege Mgr. Schaepmanlaan 13 5103 BB Dongen 01623-1 56 50
Gespreksleider:	F. L. G. Esser De Ruyterstraat 22 5102 BR Dongen 01623-1 64 89
Groningen	Scholengemeenschap Oost Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00
Gespreksleider:	Drs. J. V. Jansen Boterdiep westzijde 5 9781 EH Bedum 05900-1 30 43

Rotterdam	City College Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33
Gespreksleider:	E. J. van Dongen Walenburgerplein 126 3039 AP Rotterdam 010-67 21 30
Zutphen	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41
Gespreksleider:	J. van den Heuvel Kloetschup 15 7232 CJ Warnsveld 05750-2 39 63

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo I/B op donderdag 1 mei 1986 van 19.00 h tot 21.00 h.

Plaats	*Adres van de school*
Amsterdam	Sint Nicolaas Lyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51
Gespreksleider:	S. Th. Min Appelgaard 5 1689 HP Zwaag 02290-3 77 56
Dongen	Dr. Schaepmancollege Mgr. Schaepmanlaan 13 5103 BB Dongen 01623-1 5650
Gespreksleider:	A. L. P. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46
Groningen	Scholengemeenschap Oost Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00
Gespreksleider:	Drs. M. van Steenis Kamplaan 8 9301 KK Roden 05908-1 81 21
Rotterdam	City College Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33
Gespreksleider:	B. L. G. P. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen aan de Lek 01807-15 21 06
Zutphen	Baudartiuscollege Isendoornstraat 1 7201 NJ Zutphen 05750-1 50 41
Gespreksleider:	Drs. W. A. Weenink Kooikersdreef 623 7328 BS Apeldoorn 055-33 70 48

Examenbesprekingen wiskunde A voor vwo op woensdag 7 mei 1986 van 16.00 h tot 18.00 h.

Plaats	*Adres van de school*
Eindhoven	Technische Hogeschool Rekencentrum Eindhoven
Gespreksleider:	H. van der Kooij Nederhoven 2 5655 BS Eindhoven 040-52 49 37
Hewet-team	M. Kindt
Rotterdam	City College Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33
Gespreksleider:	Drs. J. W. Maassen Traviatastraat 132 2555 VJ 's-Gravenhage 070-68 79 98
Hewet-team	Drs. J. de Lange Jzn
Zwolle	Christelijke Lerarenopleiding*) Campus 2-4 8017 CA Zwolle 038-69 99 11
Gespreksleider:	Drs. W. H. M. Kremers De Haantjes 55 6666 DP Heteren 08306-2 26 07
Hewet-team	Drs. H. Verhage

*) Vanaf station NS 15 minuten lopen. Vanaf station NS gele bus DMV, richting Schellerbroek.

Examenbespreking wiskunde II voor vwo op woensdag 7 mei 1986 van 19.00 h-21.00 h.

Plaats	*Adres van de school*
Utrecht	Jaarbeurskongrescentrum Jaarbeursplein 3521 AL Utrecht 030-95 59 11
Gespreksleider:	H. N. Schuring Van Heemstralaan 21 6814 KB Arnhem 085-43 51 28

Inhoud

Adressen van auteurs

dr. J. v.d. Craats, K.M.A.
Postbus 90154, 4800 RJ Breda

F. Korthagen, Universiteit van Amsterdam,
Roetersstraat 15, 1018 WB Amsterdam

P. van Blokland, Geerdinkhof 561,
1103 RK Amsterdam